

Prof.Univ.Dr.Ing.Dr.h.c. POLIDOR BRATU
Membru al Academiei de Stiinte Tehnice din Romania

ACUSTICA INTERIOARA
PENTRU CONSTRUCȚII SI MASINI

Editura IMPULS
Bucuresti 2002

COPYRIGHT @ "IMPULS" - București - 2002

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale BRATU, POLIDOR

Acustica interioară pentru construcții și mașini / prof.univ.dr.ing.dr.h.c.

Polidor Bratu,- București: IMPULS, 2002

p. ; cm. Bibliogr.

Index.

ISBN 973-8132-29-0

534.83

PREFAȚĂ

Lucrarea tratează conceptele de bază, teoria și metodele de analiză a proceselor ondulatorii în domeniul frecvențelor percepute de urechea umană.

Atât teoria cât și metodele de reducere a nivelului acustic sunt elaborate și prezentate numai pentru incinte ca părți componente ale construcțiilor (locuințe, clădiri sociale, culturale, turistice, birouri etc), precum și ale mașinilor autopropulsate (cabine de comandă, caroserii). Cartea este structurată pe patru capitole care abordează problematica specifică acusticii interioare.

În capitolul I este tratată propagarea undelor elastice în medii omogene naturale (gaze, lichide, solide) și în medii neomogene ca rezultat al procedurilor tehnologice menite să ducă la realizarea produselor fonoabsorbante pe lătră construcții și mașini autopropulsate.. Astfel, se prezintă analiza proceselor fizice și modelarea matematică a propagării undelor sonore, fiindu-se cont de ipotezele și teoriile clasice fundamentale cât și de posibilitățile actuale de evaluare și prelucrare automată a datelor acustice.

Capitolul 2 este dedicat proceselor fiziologice de percepere și prelucrare a semnalelor acustice de organul auditiv uman, precum și trecerea de la senzația subiectivă la exprimarea obiectivă a parametrilor de presiune, intensitate și putere acustică. De asemenea, sunt analizate mărimile specifice ale sunetelor, perceperea, cuantificarea efectului și clasificarea lor.

În capitolul 3 este tratată acustica incintelor, atât fără absorbție cât și cu tratamente interioare fonoabsorbante. De asemenea, este analizată și oportunitatea folosirii ecranelor și a tratamentelor fonoabsorbante și antivibratili pe suprafețele interioare ale clădirilor. Sunt analizate și incintele mici pentru cabine, caroserii și canlere de eșapament la mașinile autopropulsate.

Capitolul 4 se constituie sub forma unei aplicații specifice a acusticii interioare pentru cabinele și caroseriile mașinilor autopropulsate. Astfel, sunt prezentate metodele de teste ale parametrilor antivibratili și fonoabsorbanți pentru materialele de tratare acustică, cât și metodele de calcul a reducerii nivelului de zgomot în interior.

Se menționează faptul că cerințele esențiale pentru securitatea și sănătatea omului prevăd condiții specifice de evaluare și reducere a poluării prin zgomot și vibrații. Astfel, Directiva 89/ 106 a CEE privind construcțiile și Directiva 98/ 37 a CEE privind mașinile prevăd ca una din cerințele esențiale să fie aceea a asigurării condițiilor de securitate, sănătate și confort la zgomot și vibrații.

Prezenta lucrare constituie nucleul de bază al cursului de specialitate predat de autor, atât inginerilor din anul VI master la Facultatea de Inginerie din Brăila din cadrul Universității „Dunărea de Jos” Galați, cât și studenților din anul IV la Facultatea de Instalații din cadrul Universității Tehnice de Construcții București.

Cartea este utilă inginerilor specialiști în construcții, instalații, protecția muncii, mediului, precum și studenților și absolvenților facultăților cu specializări în profilele menționate.

București

30 noiembrie 2002

Autorul

REZUMAT

Lucrarea prezentată se înscrie în cerințele Directivelor Europene 89/106 și 98/37 ale CEE privind protecția la zgomot și vibrații a omului în spații închise ale locuințelor, clădirilor publice și mașinilor autopropulsate.

În context, sunt tratate conceptele de bază, teoriile, metodele și procedeele practice de evaluare, analiză și atenuare a emisiilor sonore interioare. Din aceste motive au fost analizate sub aspect fizic și matematic procesele ondulatorii, propagarea sunetului în încăperi, probleme specifice ale acusticii fiziologice, cât și măsuri de reducere a zgomotului la construcții și mașini. Ca urmare, sunt prezentate unele soluții practice de tratare fonoabsorbantă și antivibratilă.

CUPRINS

1. TEORIA UNDELOR ELASTICE	7
1.1. Unde elastice	7
1.2. Unde plane progresive neatenuate	7
1.3. Unda plană monocromatică	9
1.4. Deformația solidelor în procesul ondulatoriu	11
1.5. Ecuația undelor	16
1.5.1. Propagarea undelor pe direcție particulară	16
1.5.2. Propagarea undelor pe direcție oarecare	17
1.6. Viteza de propagare a undelor	19
1.6.1. Viteza undelor în solide	19
1.6.2. Viteza undelor în lichide	24
1.6.3. Viteza undelor în gaze	27
1.7. Densitatea de energie acustică	29
1.8. Intensitatea acustică	31
1.9. Ecuațiile de propagare a undelor elastice în spațiul tridimensional	32
1.9.1. Ecuația de propagare a undelor într-un mediu fluid	32
1.9.2. Ecuația de propagare a undelor într-un solid elastic	37
1.9.2.1. Viteza de propagare a undelor longitudinale într-un solid elastic	40
1.9.2.2. Ecuațiile de propagare a undelor transversale într-un solid elastic	41
1.10. Ecuația de propagare a undelor plane	42
1.11. Ecuația de propagare a undelor sferice	44
1.11.1. Mărimi caracteristice ale undelor sferice	47
1.12. Proprietățile undelor	48
1.12.1. Reflexia și transmisia undelor	48
1.12.2. Absorbția sunetului în mediu	61
1.12.2.1. Absorbția volumică a sunetului	61
1.12.2.2. Absorbția superficială a sunetului	63
2. ACUSTICA FIZIOLOGICĂ	66
2.1. Mărimi acustice	66
2.1.1. Presiunea acustică	67
2.1.2. Nivelul de presiune sonoră	68
2.1.3. Intensitatea sonoră	68
2.1.4. Puterea acustică	70
2.1.5. Relații de legătură între nivelurile de presiune, intensitate și putere sonoră	70
2.1.6. Surse multiple	71
2.2. Perceperea zgomotului	72
2.2.1. Perceperea zgomotului	72
2.2.2. Domeniul de audibilitate	74
2.3. Caracteristicile sunetului	76
2.3.1. Nivelul de tărie	76
2.3.2. Nivelul acustic ponderat	78

2.3.3. Tăria sunetului	80
2.3.4. Nivelul de tărie datorat mai multor surse	82
2.3.5. Înălțimea unui sunet	83
2.3.6. Timbrul sunetului	84
3. ACUSTICA INCINTELOR	87
3.I. Elemente de acustică ondulatorie a incintei	87
3. I. 1. Propagarea undelor acustice neamortizate în spații închise	
3. I. 2. Propagarea undelor acustice amortizate în spații închise	100
3.2. Elemente de acustică geometrică a incintei	103
3.2. I. Densitatea de energie acustică într-o incintă	104
3.2.2. Durata de reverberație	109
3.2.3. Nivelul sonor al unei incinte	114
3.3. Acustica pereților despărțitori	118
3.3.1. Propagarea undelor acustice în raport cu un perete despărțitor simplu modelat ca mediu elastic neinerțial	118
3.3.2. Propagarea undelor acustice pe un perete despărțitor monostrat modelat ca mediu elastic neinerțial (corp solid rigid)	121
3.3.3. Propagarea undelor acustice pe un țxrete despărțitor monostrat modelat ca mediu elastic inerțial (corp solid deformabil)	124
3.4. Incintă cu paravane acustice	128
3.5. Incinte de atenuare a zgomotului	133
3.5.1. Incintă atenuatoare de zgomot montată între două conducte	133
3.5.2. Tobă de eșapament reactivă	134
4. REDUCEREA NIVELULUI DE ZGOMOT	136
4.I. Principalele surse de zgomot la mașini	136
4. I. I. Zgomotul generat de motoarele de ardere internă	136
4.1.2. Zgomotul generat de organe de mașini din componența mașinilor de construcții	138
4.1.3. Zgomotul produs de mașini electrice	140
4.I .4. Zgomotul produs de sistemele de acționare hidrostatică	140
4.2. Materiale antivibratile și fonoabsorbante, utilizate la combaterea zgomotului	141
4.2.1. Materiale antivibratile	141
4.2.2. Materiale fonoabsorbante	145
4.3. Soluții de combatere a zgomotului la mașini de construcții	148
4.3.1. Carcase fonoizolante	149
43.4. Insonorizarea cabinelor mașinilor mobile	153
BIBLIOGRAFIE	159

TEORIA UNDELOR ELASTICE

1.1. Unde elastice

Mediile continue se caracterizează prin sisteme de particule legate între ele (molecule, atomi sau ioni) care se află într-o permanentă interacțiune. Din acest motiv, mediile continue sub formă de gaze, lichide sau solide au proprietatea de a transmite perturbații din aproape în aproape atunci când cel puțin un punct al mediului devine sursă perturbatoare.

Oscilațiile care se propagă într-un mediu material de la particulă la particulă se constituie într-un proces ondulatoriu.

Propagarea perturbației generată într-un punct numit sursă, pe orice direcție a mediului material continuu, se numește undă elastică.

Viteza de propagare a undelor elastice este finită spre deosebire de undele electromagnetice, unde propagarea se face în mod instantaneu.

1.2. Unde plane progresive neatenuate

Considerăm un mediu elastic continuu, fără amortizare proprie, raportat la un sistem de referință fix $Oxyz$ (fig. 1.1).

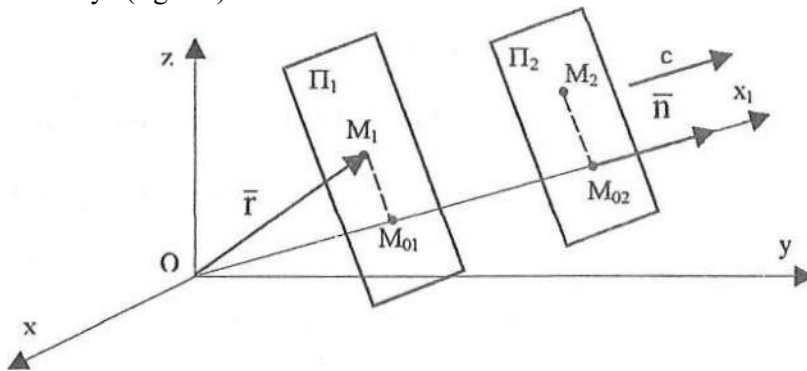


Fig. 1.1

Direcția oarecare OXI de propagare a undei elastice înțepă planele normale III și 112 în punctele MOI și Mm. Normala comună a celor două plane este n.

Unda elastica este plana atunci când toate particulele situate într-un plan normal pe direcția de propagare oscilează identic.

Considerăm o undă plană care se propagă fără atenuare pe direcția axei Ox cu viteza constantă c (fig. 1.2).

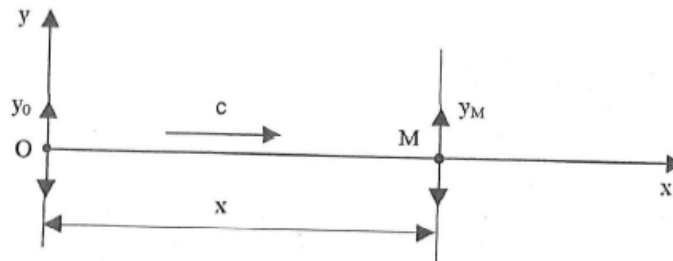


Fig. 1.2

Dacă în origine ca sursă perturbatoare deplasarea instantanee (elongația) ξ a particulei este dată de legea

$$\xi(0, t) = \Phi(t),$$

atunci în oricare punct M e Ox elongația va fi (x, t) luând aceleași valori ca în x sursă, dar cu o întârziere de timp $\tau = \frac{x}{c}$ ca urmare a propagării perturbației cu viteza finită c .

Rezultă că punctul M (x) va avea legea de mișcare de forma

$$\xi(x, t) = \xi(0, t - \tau) = \Psi\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

$$\xi(x, t) = \Psi\left(t - \frac{x}{c}\right) = \Phi(x - ct).$$

sau:

(1.1)

Elongațiile E , (x, t) ale particulelor, măsurate de la pozițiile lor de echilibru, pot fi orientate atât pe direcția de propagare a undei, caz în care unda se numește longitudinală, cât și într-o direcție normală la direcția de propagare, atunci unda se numește transversală.

Expresia (I. I) reprezintă ecuația unei unde plane progresive care se propagă fără atenuare în sensul pozitiv al axei Ox. Pentru unda care se propagă în sens invers al axei Ox, viteza c trece în $-c$ (fig. 1.3), astfel încât avem:

$$\xi(x, t) = \Psi\left(t + \frac{x}{c}\right) = \Phi(x + ct).$$

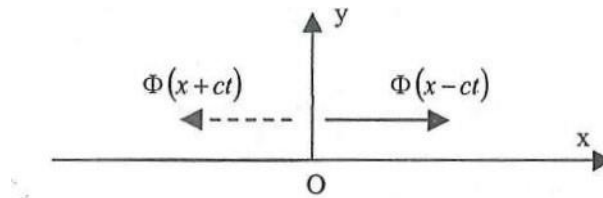


Fig. 1.3

Unda plană progresivă se caracterizează prin faptul că elongațiile E , ale punctelor situate într-un plan normal la direcția de propagare, depind simultan de cele două variabile x și t care determină caracterul progresiv al undei medii prin $x \pm ct = (P_0)$, unde (P_0) este o constantă. De aici rezultă legea de propagare rectilinie uniformă a frontului de undă, sub forma $x =$.

Pentru unda plană care se propagă în direcția versorului \hat{i} , elongația particulei M de rază vectorie F va fi aceeași cu elongația particulei $M_0(x)$, adică

$$\xi(\vec{r}, t) = \xi(x_1, t) = \Psi\left(t - \frac{x_1}{c}\right),$$

dar $XI = F \hat{i}$, deci avem:

$$\xi(\vec{r}, t) = \Psi\left(t - \frac{\vec{r} \cdot \hat{n}}{c}\right) = \Phi(\vec{r} \cdot \hat{n} - ct). \quad (1.2)$$

1.3. Unda plană monocromatică

Unda plană monocromatică caracterizează procesul ondulatoriu al mediului elastic în care fiecare punct material al acestuia efectuează numai mișcări armonice cu o anumită pulsație ω). Astfel, avem

$$\xi(0, t) = A \cos \omega t = \Psi(t)$$

pentru originea O , iar

$$\xi(x, t) = \Psi\left(t - \frac{x}{c}\right) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c}\right) \quad (1.3)$$

pentru un punct oarecare $M(x)$.

Funcția (x, t) este periodică în raport cu timpul, având perioada $T =$ și în raport cu spațiul cu perioada X , numită lungime de undă. Condiția de periodicitate spațială este

$$\xi(x + \lambda, t) = \xi(x, t),$$

sau
$$A \cos \omega \left(t - \frac{x + \lambda}{c} \right) = A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right),$$

de unde, avem

$$\cos \left[\left(\omega t - \omega \frac{x}{c} \right) + \omega \frac{\lambda}{c} \right] = \cos \left(\omega t - \omega \frac{x}{c} \right),$$

ceea ce duce la condiția $\omega \frac{\lambda}{c} = 2\pi$,

sau
$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = cT = \frac{c}{\nu}, \quad (1.4)$$

Lungimea de undă λ este egală cu distanța parcursă de undă în timpul unei perioade T .

Ecuția undei (1.3) mai poate fi pusă sub forma

$$\begin{aligned} \xi &= A \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) = A \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \\ \xi &= A \cos (\omega t - kx), \end{aligned} \quad (1.5)$$

unde k este numărul de undă egal cu numărul de unde cuprinse în 2π unități de lungime.

Vectorul de undă \vec{k} este definit de versorul \vec{n} sub forma

$$\vec{k} \stackrel{def}{=} k\vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n} = \frac{\omega}{c} \vec{n}. \quad (1.6)$$

În acest caz, ecuația undei plane monocromatice care se propagă în spațiu pe direcția versorului \vec{n} se scrie sub forma

$$\xi = A \cos (\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) = \operatorname{Re} \left\{ A e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \right\}, \quad (1.7)$$

unde argumentul cosinusului se numește faza undei

$$\varphi \stackrel{def}{=} \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}. \quad (1.8)$$

Suprafețele de undă sunt perpendiculare pe direcția de propagare a undei (în medii izotrope) și corespund condiției de fază constantă. Pentru unda plană, condiția de fază constantă $\varphi = \text{const}$, avem

$$\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} = \text{const}, \quad (1.9)$$

ceea ce reprezintă ecuația unui plan cu normala \vec{k} , pentru fiecare moment t al procesului ondulatoriu.

În cazul undei plane, suprafețele de undă sunt plane și normale pe direcția de propagare. Normalele pe suprafețele de undă se numesc raze.

Viteza undei plane monocromatice coincide cu viteza de deplasare a fazei numită viteza defază.

Din condiția ca faza să fie constantă pentru atingerea suprafețelor de undă plană, avem:

$$\varphi(x, t) = \omega t - kx = \text{const},$$

iar la $x + dx$ și $t + dt$ avem

$$\varphi(x + dx, t + dt) = \omega(t + dt) - k(x + dx),$$

de unde

$$\omega t - kx = \omega(t + dt) - k(x + dx),$$

ceea ce duce la

$$\omega dt - k dx = 0,$$

sau

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = c = v_z \quad (1.10)$$

este viteza de fază.

Studiul undelor plane monocromatice este important deoarece oferă posibilitatea caracterizării proceselor ondulatorii în medii elastice pe baza descompunerii spectrale a proceselor ondulatorii complexe formate dintr-un număr mare de unde monocromatice cu frecvențe diferite.

Notă: Undele elastice se numesc și unde sonore sau sunete, fiind grupate funcție de domeniul frecvențelor, astfel:

- infrasunete cu frecvențe sub 16 Hz;
- sunete în domeniul auditiv cu frecvențe cuprinse între 16 Hz și 16 000 Hz (lungimi de undă în aer între 20 m și 2 cm);
- ultrasunete cu frecvențe peste 20 000 Hz (până la 10 GHz).

1.4. Deformația solidelor în procesul ondulatoriu

Solidele elastice deformabile sub influența perturbațiilor generate se pot deforma longitudinal și transversal, fiind capabile să propage deformațiile sub forma undelor longitudinale sau respectiv a undelor transversale.

a) Deformația produsă de unda plană longitudinală

Ca urmare a perturbației întreținute de sursă, particulele mediului se află într-o mișcare oscilatorie continuă de-a lungul direcției de propagare. Acest fapt duce la menținerea unui proces de deformare a mediului elastic cuantificat prin deformația relativă unidirecțională $E(x, t)$ în planul $P(x)$ la distanța x față de sursa O și la momentul de timp t (fig. 1.4).

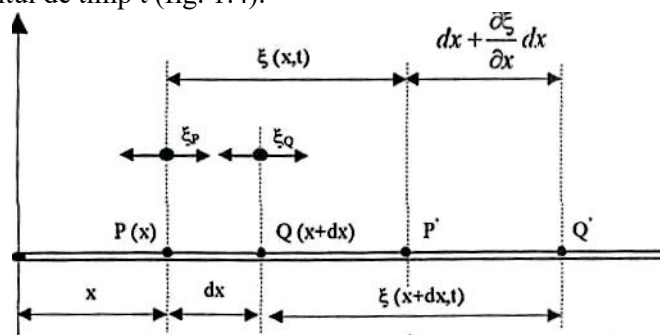


Fig. 1.4

Planul infinit apropiat $Q(x+dx)$ definește distanța dx față de planul $P(x)$, iar coordonatele x și $x + dx$ reprezintă pozițiile de echilibru ale particulelor, astfel încât distanța $PQ = dx$ reprezintă lungimea inițială nedeformată a mediului elastic unidirecțional.

La momentul t , particula din $P(x)$ se află în $P'(x+\xi)$, adică deplasată instantaneu cu elongația $\xi(x,t)$, iar particula din $Q(x+dx)$ se află deplasată instantaneu în $Q'(x+dx+\xi+\frac{\partial \xi}{\partial x} dx)$ cu elongația $\xi(x+dx,t) = \xi(x,t) + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$

Lungimea segmentului $P'Q' = dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$,

iar alungirea absolută este $P'Q' - PQ = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$, ceea ce duce la definirea deformației relative sub forma

$$\epsilon(x,t) = \frac{P'Q' - PQ}{PQ} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \tag{1.11}$$

Derivata parțială a elongației în raport cu timpul definește viteza particulei pe direcția de propagare a undei, astfel avem

$$v(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \dot{\xi} \tag{1.12}$$

b) Deformația produsă de unda plană transversală

Considerăm un mediu elastic unidimensional definit de axa Ox , unde sursa perturbatoare se află în punctul O cu perturbații normale la axa Ox . Ca urmare, toate punctele materiale ale mediului elastic situate la diverse distanțe x față de originea O vor avea mișcări similare caracterizate prin deplasările instantanee transversale $\xi(x,t)$ în raport cu direcția de propagare Ox a perturbației sursei.

În fig. 1.5 este reprezentat mediul solid elastic filiform (unidimensional) cu deplasările transversale instantanee $\xi(x,t)$ și $\xi + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx$ ale punctelor materiale situate în planurile $P(x)$ și $Q(x + dx)$ normale la direcția de propagare.

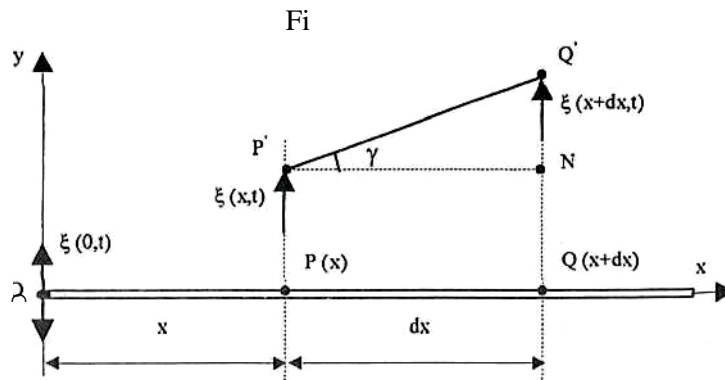


Fig. 1.5

Punctele infinit vecine P și Q vor avea elongații diferite în timpul deformării transversale ca urmare a propagării undei plane, ceea ce duce la definirea deformației elastice relative $\gamma(x,t)$, de forma

$$\begin{aligned} \gamma(x,t) &= \frac{Q'N}{PQ} = \frac{\xi(x+dx,t) - \xi(x,t)}{dx}, \\ \text{sau} \quad \gamma(x,t) &= \frac{\xi(x,t) + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx - \xi(x,t)}{dx} = \frac{\partial \xi}{\partial x}, \\ \text{adică} \quad \gamma(x,t) &= \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned} \quad (1.13)$$

care definește deformația elastică relativă de lunecare (forfecare).

Notă: Deformația elastică relativă longitudinală sau transversală este egală cu derivata parțială a elongației în raport cu coordonata curentă ce definește poziția oricărui punct material ce aparține mediului solid elastic unidimensional.

c) Deformațiile produse de unda plană progresivă
Considerăm ecuația undei plane neatenuate de forma

$$\begin{aligned} \text{unde} \quad \xi(x,t) &= \Psi\left(t - \frac{x}{c}\right) = \Psi(u) \\ \text{cu} \quad u &= t - \frac{x}{c}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= 1; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c}. \end{aligned}$$

Viteza de oscilație a unei particule ce aparține mediului elastic este

$$\begin{aligned} \text{iar} \quad v &= \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial u}, \\ \text{sau} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial u}, \\ &\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{v}{c}. \end{aligned}$$

Astfel, deformația relativă longitudinală sau transversală pot fi scrise sub forma

$$\begin{cases} \epsilon(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{v}{c} \\ \gamma(x,t) = \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{v}{c} \end{cases} \quad (1.14)$$

Deformația relativă la alungire sau lunecare este egală cu raportul, cu semn schimbat, dintre viteza particulei și viteza undei.

Pentru cazul unei plane progresive care se propagă în sensul invers (negativ) al axei Ox, avem

$$\varepsilon = \gamma = \frac{\partial \xi}{\partial x} = + \frac{1}{c} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v}{c} \quad (1.15)$$

Se constată că deformația $\varepsilon(x,t)$ sau $\gamma(x,t)$ este maximă acolo unde viteza particulelor $v(x,t)$ este maximă, adică în punctele în care particulele mediului trec prin pozițiile lor de echilibru.

În cazul unei plane monocromatice cu $\xi(x,t) = A \cos(\omega t - kx)$ avem

$$v = \frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}, \text{ sau } v = -A\omega \sin(\omega t - kx).$$

Astfel, pe baza relației (1.14) obținem

$$\varepsilon(x,t) = \gamma(x,t) = \frac{A\omega}{c} \sin(\omega t - kx),$$

în care ținem seama de $\frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ și avem

$$\varepsilon(x,t) = \gamma(x,t) = \frac{2\pi}{\lambda} A \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right), \quad (1.16)$$

sau

$$\varepsilon(x,t) = \gamma(x,t) = k A \sin(\omega t - kx) \quad (1.17)$$

Astfel, pe baza relației (1.14) obținem

Din relațiile (1.16) și (1.17) se observă că deformațiile relative sunt nule în punctele pentru care elongațiile sunt maxime și reciproc, adică deformațiile relative sunt maxime acolo unde elongațiile sunt nule. Această corelație este ilustrată în cazul undelor transversale pentru două plane transversale P și Q infinit apropiate, iar $\omega t = 2\pi$ rad (fig 1.6)

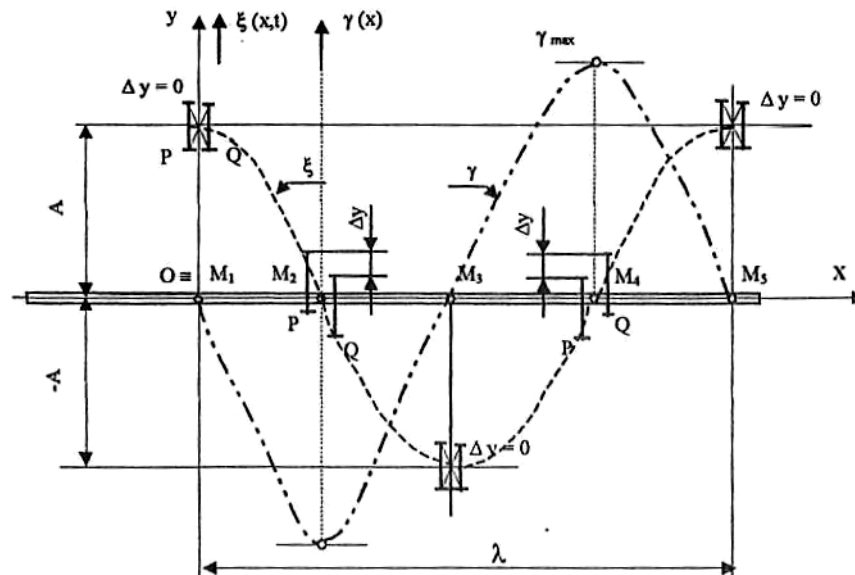


Fig. 1.6

Se aleg particulele mediului elastic plasate în punctele geometrice M_1 , M_2 , M_3 , M_4 și M_5 , astfel încât punctul M_1 să coincidă cu sursa perturbatoare O de ecuație Astfel, avem:

- pentru M_1 , $\xi(0, t) = \xi_{\max} = A$; $\Delta y = y_Q - y_P = 0$, iar $\gamma_1(0, t) = 0$;
- pentru M_2 , $\xi\left(\frac{\lambda}{4}, t\right) = 0$; $\Delta y \neq 0$; $\gamma_2\left(\frac{\lambda}{4}, t\right) = \gamma_{\max}$;
- pentru M_3 , $\xi\left(\frac{\lambda}{2}, t\right) = \xi_{\max} = -A$; $\Delta y = 0$, $\gamma_3\left(-\frac{\lambda}{2}, t\right) = 0$;
- pentru M_4 , $\xi\left(\frac{3\lambda}{4}, t\right) = 0$; $\Delta y \neq 0$, $\gamma_4\left(\frac{3\lambda}{4}, t\right) = \gamma_{\max}$;
- pentru M_5 , $\xi(\lambda, t) = \xi_{\max} = A$; $\Delta y = 0$; $\gamma_5(\lambda, t) = 0$.

În cazul undelor longitudinale, mediul elastic unidimensional se caracterizează prin zone distincte de comprimări și destinderi (alungiri) cu valori maxime în punctele pentru care elongațiile sunt nule, deoarece vitezele particulelor sunt maxime.

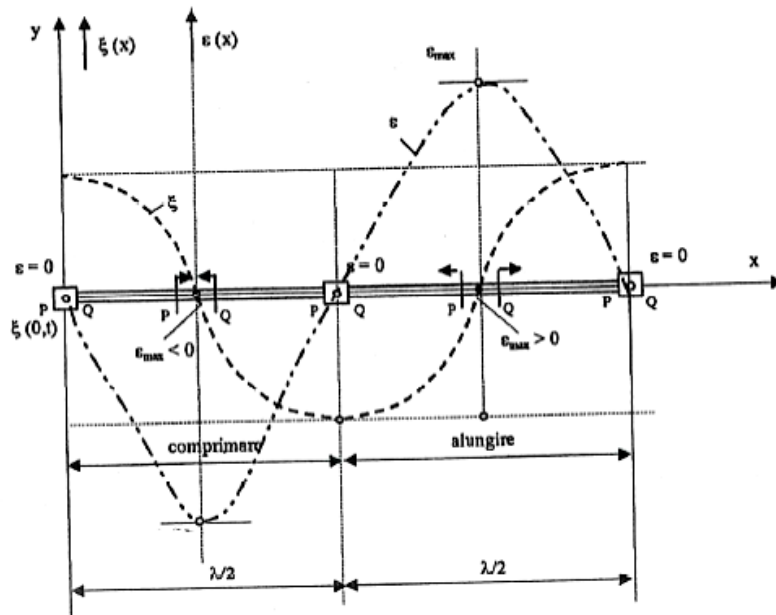


Fig. 1.7

Pentru punctele barei elastice în care $v = 0$, la $x = 0$, $x = \lambda/2$ și $x = \lambda$, deformația relativă liniară $\epsilon = 0$, cele două secțiuni date de planele P, Q se deplasează sincron și sinfazic cu viteză relativă nulă, la momentul de timp pentru care $\omega t = 2\pi \text{rad}$ (fig. 1.7).

1.5. Ecuația undelor

1.5.1. Propagarea undelor pe direcție particulară

Folosim rezultatul anterior pentru care

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x},$$

sau

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1.18)$$

Dar

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial u},$$

deci

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial u},$$

așa încât relația (1.18) devine

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (1.19)$$

Derivând încă o dată pe $\frac{\partial \Psi}{\partial x}$, avem

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right),$$

sau

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right),$$

în care introducem (1.19) și obținem

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{1}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)$$

sau, în final

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \quad (1.20)$$

Relația (1.20) se numește ecuația undelor pentru un mediu elastic, fără amortizare, omogen și izotrop cu o singură direcție particulară propagare Ox. Această ecuație mai poate fi scrisă și sub forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

sau

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0 \quad (1.21)$$

Ecuția (1.21) este verificată de unda directă $\xi_1(x, t) = \Psi_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$ și

$\xi_2(x, t) = \Psi_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$, astfel încât soluția generală este o suprapunere a celor două soluții, adică

$$\Psi(x, t) = \Psi_1\left(t - \frac{x}{c}\right) + \Psi_2\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

1.5.2. Propagarea undelor pe direcție oarecare

Ecuția undelor în cazul propagării pe o direcție oarecare în spațiu se obține în mod analog, folosind ecuația unei plane sub forma

$$\Psi\left(t - \frac{\bar{n}\bar{r}}{c}\right) = \Psi(u)$$

unde
$$u = t - \frac{\bar{n}\bar{r}}{c} = t - \frac{1}{c}(xn_x + yn_y + zn_z).$$

Astfel, avem

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t}; \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 1,$$

de unde

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \tag{1.22}$$

Pe de altă parte, obținem:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{n_x}{c},$$

deci

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -\frac{n_x}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial u}. \tag{1.23}$$

Derivând încă o dată (1.23), avem:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{n_x}{c} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial u} = -\frac{n_x}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \right),$$

sau

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{n_x}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{n_x}{c} \frac{\partial \Psi}{\partial u} \right) = \frac{n_x^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2},$$

iar, în final, obținem

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \frac{n_x^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}, \tag{1.24}$$

de unde avem proiecția n_x a versorului \bar{n} pe axa Ox, sub forma

$$n_x^2 = c^2 \frac{\partial^2 t}{\partial^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \tag{1.25}$$

și în mod similar n_y^2 și n_z^2 , astfel

$$n_y^2 = c^2 \frac{\partial^2 t}{\partial^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}, \quad (1.26)$$

$$n_z^2 = c^2 \frac{\partial^2 t}{\partial^2 \Psi} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2}. \quad (1.27)$$

Dar, $n^2 = 1 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$, ceea ce prin însumarea relațiilor (1.25), (1.26) și (1.27) obținem

$$1 = c^2 \frac{\partial^2 t}{\partial^2 \Psi} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right),$$

sau

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \Delta \Psi = \text{lap} \Psi, \quad (1.28)$$

unde Δ este operatorul Lapace, numit laplacean.

Ecuția undelor exprimată de relația (1.28) mai poate fi pusă sub forma

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0, \quad (1.29)$$

sau

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \Psi = 0.$$

$$\square = \text{dal} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\square = \text{dal} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

relația (1.29) mai poate fi scrisă astfel:

$$\square \Psi = \text{dal} \Psi = 0 \quad (1.30)$$

ecuația undelor.

Ecuția undelor mai poate fi exprimată și cu ajutorul funcției de undă $\phi(x, t)$ de forma

$$\Phi(x, t) = \Phi_1(x - ct) + \Phi_2(x + ct), \quad (1.31)$$

astfel încât pentru direcția particulară Ox avem:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}. \quad (1.32)$$

Ecuatia undelor pentru o direccie oarecare de propagare dupa versorul n , formulata in raport cu functia de unda, $\Phi = \Phi(x, y, z, t)$, este de forma

$$\square \Phi = \text{div grad} \Phi = 0 \quad (1.33)$$

ecuatie cu derivate partiale de tip hiperbolic.

1.6. Viteza de propagare a undelor

1.6.1. Viteza undelor in solide

a) Viteza undelor longitudinale

Consideram o bara elastica in care se propaga de-a lungul ei unde longitudinale (fig.1.8).

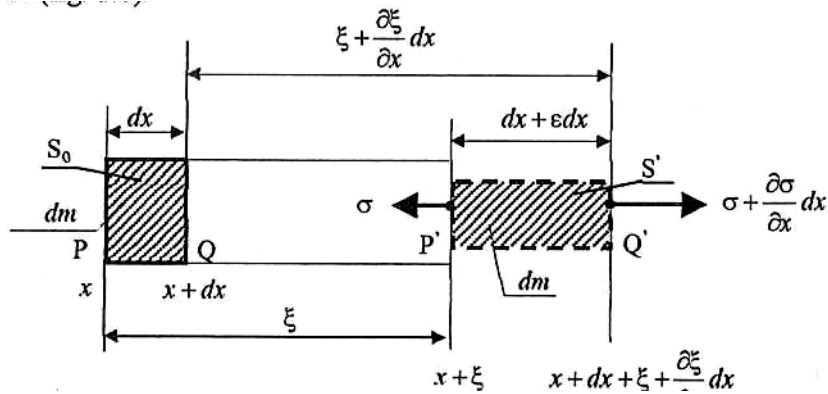


Fig. 1.8

Legea lui Hooke pentru bara elastica intr-o sectiune x este de forma:

$$\sigma(x, t) = \frac{1}{S_0} F(x, t) = E \epsilon(x, t)$$

sau
$$\sigma(x, t) = E \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.34)$$

Pentru un mediu elastic nemarginit, avem:

$$\sigma(x, t) = E' \epsilon = \frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)} \epsilon, \quad (1.35)$$

unde se poate aproxima $E' = 1,35E$.

Masa elementara a stratului de material cu grosimea d_x este $dm = \rho_0 S_0 dx$, unde ρ_0 este densitatea materialului in absenta procesului ondulatoriu.

Fora rezultanta ce se nastie in procesul ondulatoriu este data de ecuatia

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = dF,$$

dar
$$-F + F + dF = -\sigma S_0 + \left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx \right) S_0,$$

de unde:
$$dF = S_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx.$$

Astfel, avem:

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx,$$

sau
$$\rho_0 S_0 dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S_0 \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx,$$

de unde
$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}.$$

Pe de altă parte, avem:

$$\sigma = E \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

deci:
$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

de unde rezultă:
$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

sau
$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho_0}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}. \quad (1.36)$$

Din asemănarea cu ecuația (1.32), rezultă că:

$$\frac{\rho_0}{E} = \frac{1}{c^2},$$

de unde:
$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}.$$

În consecință, viteza de propagare a undelor longitudinale c_l este de forma:

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}, \quad (1.37)$$

numită și formula lui Newton.

Pentru mediu elastic nemărginit, viteza undelor longitudinale este

$$c'_l = \sqrt{\frac{E'}{\rho}} = \sqrt{\frac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)\rho}} > c_l,$$

sau

$$c'_l \cong 1,16 c_l.$$

b) Viteza undelor transversale

Considerăm mediul elastic supus unui proces ondulatoriu transversal pe direcția de propagare (fig. 1.9).

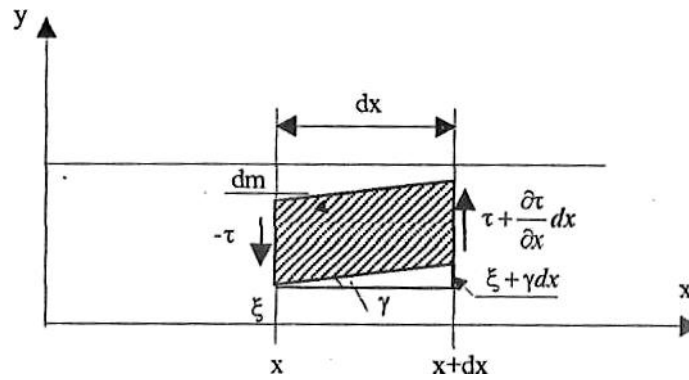


Fig. 1.9

Forța elastică de forfecare elementară este $dF = S \frac{\partial \tau}{\partial x} dx$, iar din ecuația de echilibru dinamic avem:

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \frac{\partial \tau}{\partial x} dx,$$

unde

$$dm = \rho S dx,$$

astfel, obținem

$$\rho S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \frac{\partial \tau}{\partial x} dx,$$

sau

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\partial \tau}{\partial x}.$$

Pe de altă parte, tensiunea $\tau = Gy$ poate fi pusă sub forma $\tau = G \frac{\partial \xi}{\partial x}$, deci,

în final, obținem:

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = G \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right),$$

sau

$$\rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1.38)$$

de unde

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{\rho}{G} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (1.39)$$

astfel încât viteza de propagare c_t rezultă sub forma:

$$c_t = \sqrt{\frac{G}{\rho}}, \quad (1.40)$$

Relația (1.40) poate fi scrisă funcție de modulul E și coeficientul lui Poisson μ , astfel:

$$c_t = \sqrt{\frac{E}{2(1+\mu)\rho}} < c_l, \quad (1.41)$$

unde G este modulul de forfecare (lunecare).

Deoarece $G \cong 0,4E$, rezultă că $c_t \cong 0,62c_l$, ceea ce dovedește că viteza unei longitudinale este mai mare decât a celei transversale.

Pentru mediul elastic nemărginit, viteza de propagare c'_l ; se determină prin comparație cu viteza c_t prin mediul elastic mărginit, astfel avem:

$$\frac{c'_l}{c_t} = \sqrt{\frac{2(1+\mu)}{1-2\mu}} > 1, \quad (1.42)$$

iar pentru $\mu = 0,3$ se obține $\frac{c'_l}{c_t} = 1,87$.

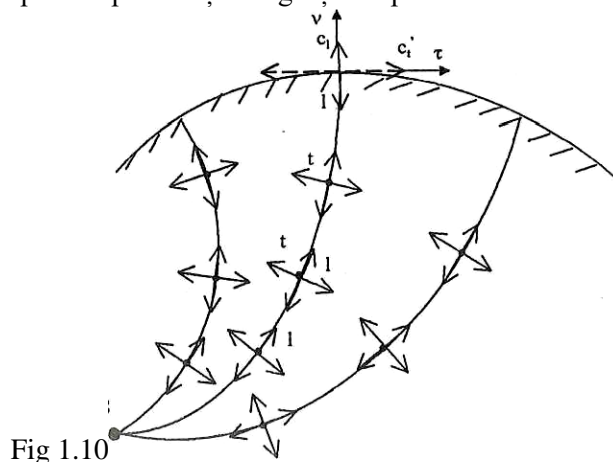
În tabelul 1.1 se prezintă viteza sunetului în materiale solide:

Tabelul 1.1

Nr crt	Denumirea materialului	E [10 ¹⁰ N/m ²]	p [10 ³ g/cm ²]	Coef Poisson μ	Viteza m/s		
					C ₁	C ₂	C ₃
1	Alamă	9,0	8,4÷8,7	0,35	3400	4500	2100
2	Aluminiu	7,0	2,70	0,34	5240	6400	3130
3	Argint	7,7	10,50	0,37	2800	3700	1694
4	Cupru	11,0	8,89	0,34	3600	4700	
5	Fier	21,0	7,86	0,28	5130	5900	

6	Lemn	0,9+1,7	0,7÷0,9		3600+ 4000		
7	Nichel	21,0	8,80	0,30	4900		
8	Oțel	20+22	7,80	0,28	5100	6000	
9	Platină	17,0	21,45	0,39	2800	3960	
10	Sticlă (crown)	6,0	2,4+2,8	0,25	5600	5700	3300
	Zinc	8,0	7,10	0,23	3800	4170	
12	Beton		2,0		4500		
13	Granit				6000		
14	Cauciuc vulcanizat				54		

Ca urmare a diferenței mari dintre vitezele de propagare a undelor longitudinale și cele transversale în procesul de propagare a cutremurelor de pământ se evidențiază mai întâi unda longitudinală care apare la suprafața pământului după care pe direcția tangențială apare unda transversală (fig. 1. 10).



1.6.2. Viteza undelor în lichide

Propagarea undelor în lichide duce la variația densității și a presiunii. Din acest motiv pentru evaluarea vitezei de propagare a unei sonore în lichide este necesar să se țină cont de variația densității și presiunii în timpul procesului ondulatoriu.

a) Variația densității lichidului în timpul procesului ondulatoriu

În figura 1.10 s-a reprezentat un tub de lichid cu secțiunea S care constituie suportul material pentru propagarea unei plane. Se consideră că tubul de lichid este nedeformabil radial astfel încât aria S a secțiunii transversale se menține constantă.

În aceste condiții se poate determina variația densității lichidului ca urmare a prezenței unei longitudinale care se propagă. Se notează cu p_0 densitatea lichidului în stare de repaus adică în absența unei. Elementul de masă poate fi exprimat sub forma:

$$dm = \rho_0 S dx = \rho S \left(dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx \right),$$

de unde

$$\rho_0 = \rho \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right). \quad (1.42)$$

Din relația (1.40) avem:

$$\Delta p = p - p_0 = -p \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

unde în membrul drept adunăm și scădem $\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$ astfel:

$$\Delta p = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} - p \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$\text{sau} \quad \Delta p = -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} - (\rho - \rho_0) \frac{\partial \xi}{\partial x} \cong -\rho_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

unde s-a ținut seama de cantitățile foarte mici referitoare la $\left| \frac{\partial \xi}{\partial x} \right| \ll 1$ și $|\rho - \rho_0| \ll \rho_0$.
 Variația relativă a densității este dată de relația:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\varepsilon.$$

(1.43)

În cazul unei unde progresive avem:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho_0} = -\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{v}{c}, \quad (1.44)$$

adică variația relativă a densității lichidului este egală cu raportul dintre viteza particulelor și viteza de propagare a unde.

b) *Variația presiunii lichidului în timpul procesului ondulatoriu*

Considerăm că lichidul se află în repaus, adică în absența unde, fiind caracterizat de densitatea ρ_0 și de presiunea P_0 . Ca urmare a propagării unde în lichid se modifică densitatea care provoacă o variație a presiunii. Pentru aceasta vom ține seama de dezvoltarea în serie Mac Laurin a presiunii în raport cu densitatea lichidului în timpul procesului ondulatoriu. Astfel, avem

$$p = p_0 + \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 (\rho - \rho_0) + \dots$$

de unde

$$\Delta p = p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 (\rho - \rho_0),$$

sau

$$\Delta p = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \Delta \rho \quad (1.45)$$

în care s-a ținut seama de aproximațiile $|\Delta \rho| \ll \rho_0$, $|\Delta p| \ll p_0$, ceea ce a dus la neglijarea termenilor de ordin superior în dezvoltarea Mac Laurin.

Ținând seama de faptul că procesele ondulatorii se realizează cu frecvențe mari iar conductivitatea termică a lichidelor este mult mai mică decât a solidelor s-a adoptat ipoteza verificată experimental că propagarea undelor are loc ca un proces termodinamic adiabatic. În acest caz, variația presiunii în raport cu

densitatea $\frac{\partial p}{\partial \rho}$ trebuie calculată în condițiile unui proces adiabatic, astfel:

$$\Delta p = p - p_0 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \Delta \rho, \quad (1.46)$$

sau ținând seama de relația (1.42) avem

$$\Delta p = -p_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (1.47)$$

c) Viteza undelor

Pentru elementul de masă dm sub acțiunea unei ce se propagă cu viteza c pe direcția Ox , aplicăm legea fundamentală a mecanicii sub forma

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = pS - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) S$$

sau

$$dm \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -S \frac{\partial p}{\partial x} dx \quad (1.48)$$

Ținând seama de relația (1.44) scrisă sub forma

$$p - p_0 = -\rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

sau

$$p = p_0 - \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

de unde avem

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (1.49)$$

caz în care relația (1.45) poate fi scrisă astfel,

$$\rho_0 S dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = S \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} dx,$$

de unde obținem

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (1.50)$$

Din relația (1.47) se deduce viteza sunetului în lichid sub forma

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{ad}.$$

În acest caz, relația (1.47) poate fi scrisă astfel :

$$\Delta p = c^2 \Delta \rho \quad (1.51)$$

adică variația de presiune $\Delta p = p - p_0$ în tubul de lichid supus unui proces ondulatoriu este direct proporțională cu variația de densitate $\Delta \rho = \rho - \rho_0$ a lichidului, iar constanta de proporționalitate c^2 este pătratul vitezei de propagare a undei.

Folosind modulul de compresiune a lichidului definit sub forma

$$K = -V \frac{\partial p}{\partial V},$$

și ținând seama de faptul că $\rho = \frac{m}{V}$, iar $\frac{\partial \rho}{\partial V} = -\frac{m}{V^2}$,

Astfel, obținem

$$K_{ad} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{ad} = \rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right) \quad (1.52)$$

modulul de compresiune adiabatic,

Ținând seama de relația (1.48) și (1.50) avem

$$K_{ad} = \rho c^2,$$

de unde

$$c = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\rho}} \quad (1.53)$$

care reprezintă expresia vitezei de propagare a undelor sonore în lichid

Variația de presiune dată de relația (1.49) poate fi exprimată astfel

$$\Delta p = c^2 \Delta \rho = \frac{K_{ad}}{\rho} \Delta \rho,$$

în care înlocuim $\Delta \rho$ cu formula (1.44) și avem

$$\Delta p = -\frac{K_{ad}}{\rho} \rho \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

sau

$$\Delta p = -K_{ad} \frac{\partial \xi}{\partial x} = -K_{ad} \varepsilon. \quad (1.54)$$

Se constată că variația de presiune a lichidului este proporțională cu deformația relativă ε a mediului elastic.

În cazul unei plane progresive avem:

$$\Delta p = -K_{ad} \left(-\frac{v}{c} \right),$$

sau

$$\Delta p = c^2 \rho \frac{v}{c} = \rho c v, \quad (1.55)$$

adică variația de presiune Δp în cazul lichidelor supuse undelor plane progresive este direct proporțională cu viteza de propagare a undei și cu viteza particulelor. În tabelul 1.2 se prezintă viteza sunetului pentru câteva lichide:

Tabelul 1.2

Nr. crt.	Denumirea lichidului	Viteza c, m/s
1	Apă, la 0°C	1407
2	Petrol, la 25°C	1225
3	Mercur la 20°C	1451
4	Alcool etilic, la 20 C	1177

1.6.3. Viteza undelor în gaze

Pe baza studiilor lui Laplace referitoare la procesele termodinamice care se nasc în gaze atunci când acestea sunt supuse acțiunii unor procese ondulatorii s-a stabilit că transformările termodinamice sunt *adiabatic*.

Pentru calculul modulului adiabatic K_{ad} folosim legea lui Poisson în cazul proceselor adiabatic, sub forma:

$$pV^\gamma = a = const \quad (1.56)$$

unde $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{c_p}{c_v}$ este exponentul adiabatic.

Logaritmând relația (1.56) avem

$$\ln p + \gamma \ln V = \ln a, \quad (1.57)$$

iar prin diferențierea relației (1.57) obținem:

$$\frac{dp}{p} + \gamma \frac{dV}{V} = 0 \quad (1.58)$$

de unde rezultă:

$$\left(\frac{dp}{dV} \right)_{ad} = -\gamma \frac{p}{V}. \quad (1.59)$$

Modulul adiabatic al gazului K_{ad} va fi:

$$K_{ad} = -V \left(\frac{\partial p}{\partial V} \right)_{ad} = \gamma p \quad (1.60)$$

caz în care viteza undelor în gaze este:

$$c = \sqrt{\frac{K_{ad}}{\rho}} = \sqrt{\gamma \frac{p}{\rho}}, \quad (1.61)$$

unde pe baza ecuației de stare a gazelor perfecte avem:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

sau

$$\frac{m}{V} = \rho = \frac{p\mu}{RT}. \quad (1.62)$$

Din relațiile (1.59) și (1.60) se obține:

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{\mu}}, \quad (1.63)$$

adică viteza undei în gaz depinde numai de temperatură. În tabelul 1.3 se prezintă viteza sunetului în gaze.

Tabelul 1.3

Nr. crt.	Gazul	Viteza sunetului c, m/s (la 0°C)
1	Aer	330
2	CO ₂	260
3	H ₂	1286
4	O ₂	315
5	NH ₃	415
6	N ₂	334
7	CH ₄	430

În ecuația (1.58) înlocuim $\frac{dV}{V}$, astfel știm că $\rho = \frac{m}{V}$,

iar
de unde

$$d\rho = -m \frac{dV}{V^2},$$

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V}. \quad (1.64)$$

Din relațiile (1.58) și (1.64) rezultă:

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\rho}{\rho} \quad (1.65)$$

iar pentru variații mici putem scrie relația (1.57) sub forma:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (1.66)$$

În cazul unei unde progresive, avem:

$$\frac{\Delta p}{p_0} = \gamma \frac{v}{c} \quad (1.67)$$

1.7. Densitatea de energie acustică

Procesul ondulatoriu în mediul elastic înseamnă existența unei perturbații întreținute de o sursă. Aceasta implică o cedare de energie de la sursă la mediu, iar această energie se propagă în mediu odată cu unda. Energia acustică pe care o conține unitatea de volum din mediul elastic de propagare se numește *densitate de energie acustică*.

Considerăm un element de volum ΔV din mediul elastic ce conține energia totală ΔW care se dezvoltă în procesul ondulatoriu. Energia totală ΔW se compune din energia cinetică ΔW_c a tuturor particulelor aflate în mișcare și energia potențială de deformare ΔW_p , astfel încât avem:

$$\Delta W = \Delta W_c + \Delta W_p. \quad (1.68)$$

Energia cinetică din elementul de volum ΔV este dată de deplasarea tuturor particulelor cu viteza v , astfel:

$$\Delta W_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \Delta V. \quad (1.69)$$

Energia potențială elastică din elementul de volum ΔV este egală cu lucrul mecanic produs de presiunea acustică, în ipoteza lipsei pierderilor de energie în mediu. Dacă creșterea de presiune este $p' - p_0 = p$ iar descreșterea de volum $d(\Delta V)$, avem:

$$dW_p = dL = \frac{1}{2} p d(\Delta V) \quad (1.70)$$

sau

$$dW_p = \frac{1}{2} p \frac{d(\Delta V)}{\Delta V} \Delta V = \frac{1}{2} p \varepsilon \Delta V, \quad (1.71)$$

dar

$$\varepsilon = \frac{p}{E} = \frac{p}{\rho_0 c^2},$$

deci, în final se obține:

$$\Delta W_p = \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c^2} \Delta V. \quad (1.72)$$

Ținând seama de relațiile (1.63) și (1.66), relația (1.62) poate fi scrisă astfel:

$$\Delta W = \frac{1}{2} \rho_0 v^2 \Delta V + \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho_0 c^2} \Delta V, \quad (1.73)$$

iar *densitatea de energie* E rezultă sub forma:

$$E = \frac{\Delta W}{\Delta V} = \frac{1}{2} \left(\rho_0 v^2 + \frac{p^2}{\rho_0 c^2} \right), \quad (1.74)$$

sau ținând seama de faptul că $p = \rho_0 c v$ avem:

$$E = \frac{p^2}{\rho_0 c^2}. \quad (1.75)$$

În cazul unei *unde plane progresive*, presiunea acustică $p(x,t)$ și viteza $v(x,t)$ a particulei, pentru un punct de coordonată x și la momentul t , vom avea:

$$p(x,t) = p_{\max} \sin(\omega t - kx), \quad (1.76)$$

unde $p_{\max} = \rho_0 \omega A$ este amplitudinea presiunii acustice.

Ținând cont de relația (1.68) *densitatea de energie* E are forma *instantanee* dată de relația:

$$E = \frac{p_{\max}^2}{\rho_0 c^2} \sin^2(\omega t - kx). \quad (1.77)$$

Valoarea medie a densității de energie E se obține integrând expresia (1.77) fie pe o perioadă de timp T , fie pe o lungime de undă λ , astfel:

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T E dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{p_{\max}^2}{\rho_0 c^2} \sin^2(\omega t - kx) dt,$$

de unde

$$\bar{E} = \frac{p_{\max}^2}{2\rho_0 c^2} \quad (1.78)$$

sau

$$\bar{E} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda E dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \frac{p_{\max}^2}{\rho_0 c^2} \sin^2(\omega t - kx) dx$$

de unde avem

$$\bar{E} = \frac{p_{\max}^2}{2\rho_0 c^2}$$

Dacă în expresiile (1.78) sau (1.79) se introduce valoarea presiunii efective (1.79) (eficace) de forma $p_{\max} = p_{ef} \sqrt{2}$, atunci avem

$$\bar{E} = \frac{p_{ef}^2}{2\rho_0 c^2} \quad (1.80)$$

1.8 Intensitatea acustică

Prin definiție *intensitatea acustică* reprezintă *energia acustică* medie transferată prin unitatea de suprafață în unitatea de timp. Ținem seama de faptul că energia este transportată de undă și la un moment aceasta este cuprinsă într-un volum elementar $dV = dS c dt$, unde S este suprafața normală la direcția de propagare a undei de viteza c .

Ca urmare, avem relația:

$$dW = E dV = E c dS dt,$$

iar fluxul de energie elementar $d\Phi_w$ care este energia totală elementară raportată la unitatea de timp va fi:

$$d\Phi_w = \frac{dW}{dt} = E c dS \quad (1.81)$$

Intensitatea acustică I este valoarea medie a fluxului de energie raportată la unitatea de arie sau valoarea medie a densității de energie raportată la unitatea de

timp, adică

$$I = \frac{d\Phi_w}{dS} = \bar{E} c,$$

sau

$$I = \frac{\bar{E}}{\frac{1}{c}} = \bar{E} c, \quad (1.82)$$

în care introducem \bar{E} din (1.81) și avem:

$$I = \frac{p_{\max}^2}{2\rho_0 c}, \quad \text{în } \frac{W}{m^2}. \quad (1.83)$$

Pentru o sursă punctiformă care generează o undă sferică, fluxul de energie Φ_w este dat de relația:

$$\Phi_w = IS = 4\pi r^2 I,$$

$$I = \frac{\Phi_w}{4\pi r^2}. \quad (1.84)$$

de unde avem:

Deoarece depinde numai de puterea sursei fiind independent de distanța r , rezultă că intensitatea acustică scade cu pătratul distanței, adică se produce dispersia în spațiul de propagare a undei acustice.

1.9 Ecuațiile de propagare a undelor elastice în spațiul tridimensional

Se va aborda caracterul spațial tridimensional al propagării undelor elastice în fluide și solide astfel încât ecuațiile undelor să fie formulate pentru cele trei coordonate triortogonale x, y, z într-un spațiu geometric euclidian.

1.9.1 Ecuația de propagare a undelor într-un mediu fluid

În figura 1.II se prezintă elementul de volum $dV = dx dy dz$, iar pe axa Ox sunt figurate presiunile p și $p + \frac{\partial p}{\partial x} dx$ ce acționează pe fețele normale la axa Ox astfel încât forța rezultantă să fie orientată în sensul axei Ox .

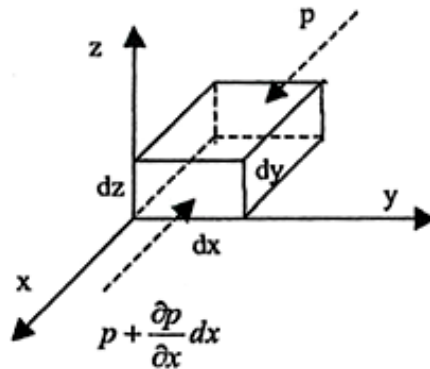


Fig. 1.1

Forța rezultantă pe axa Ox este:

$$dF_x = p \, dy \, dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) dy \, dz = -\frac{\partial p}{\partial x} dx \, dy \, dz .$$

Masa elementului de volum dV este $dm = \rho dx dy dz$ iar accelerația sa pe direcția axei Ox este $a_x = \frac{dv_x}{dt}$, unde v_x este viteza particulelor pe direcția Ox .

Fiind raportată la sistemul de coordonate Euler, trebuie să ținem seama de faptul v_x este funcție de timpul t și de coordonatele triortogonale x, y, z astfel încât avem:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial t} ,$$

sau

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z + \frac{\partial v_x}{\partial t} .$$

Ținând seama de micile oscilații ale particulelor putem aproxima cu zero produsele mixte de tipul $\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x, \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y, \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z$ încât obținem :

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} \cong \frac{\partial v_x}{\partial t} \quad (1.85)$$

Aplicând ecuația fundamentală a dinamicii pentru elementul de masă dm acționat de forța elementară dF_x , avem:

$$\rho \, dx dy dz \frac{dv_x}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} dx dy dz ,$$

de unde

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} . \quad (1.86)$$

În mod analog, avem pentru celelalte axe astfel

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} , \quad (1.87)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} , \quad (1.88)$$

iar prin însumare avem

$$\frac{dv_x}{dt} \bar{i} + \frac{dv_y}{dt} \bar{j} + \frac{dv_z}{dt} \bar{k} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{k} \right)$$

sau

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p$$

(1.89)

Ecuția de continuitate, respectiv de conservare a masei de fluid în volumul dV este

$$\Delta m(x, y, z, t) = 0 \quad (1.90)$$

Astfel, prin fețele normale la axa Ox a paralelipipedului elementar intră

masa de fluid $\rho v_x dt dy dz$ și iese masa de fluid $\left[\rho v_x + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx \right] dt dy dz$, așa încât variația de masă pe direcția axei Ox este:

$$\Delta m_x = \left[\rho v_x dt + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dt - \rho v_x dt \right] dy dz,$$

sau

$$\Delta m_x = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} dx dy dz dt.$$

În mod similar obținem Δm_y și Δm_z pentru axele Oy și Oz , astfel:

$$\Delta m_y = \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} dx dy dz dt, \quad (1.92)$$

$$\Delta m_z = \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} dx dy dz dt \quad (1.93)$$

Variația masei în timp, ca urmare a modificării densității va fi de forma:

$$\Delta m_t = \left(\rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \right) dx dy dz - \rho dx dy dz$$

sau

$$\Delta m_t = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt dx dy dz . \quad (1.94)$$

Din relațiile (1.91), (1.92), (1.93) și (1.94) împreună cu (1.90) se obține condiția de continuitate sub forma:

$$\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 , \quad (1.95)$$

Sau

$$\operatorname{div}(\rho \bar{v}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (1.96)$$

unde $\operatorname{div}(\rho \bar{v})$ este divergența vectorului $\rho \bar{v}$ care prin definiție este o mărime scalară de forma:

$$\operatorname{div}(\rho \bar{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} .$$

Dacă se ține seama de faptul că variațiile $\frac{\partial \rho}{\partial x}$, $\frac{\partial \rho}{\partial y}$, $\frac{\partial \rho}{\partial z}$ sunt foarte mici ca

și vitezele v_x, v_y, v_z de asemenea mici, atunci produsele pot fi neglijate, adică,

$\frac{\partial \rho}{\partial x} v_x, \frac{\partial \rho}{\partial y} v_y, \frac{\partial \rho}{\partial z} v_z$ astfel încât relația (1.85) poate fi pusă sub forma:

$$\operatorname{div}(\rho \bar{v}) = \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} .$$

sau

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (1.97)$$

iar în forma restrânsă va fi:

$$\rho \operatorname{div} \bar{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 . \quad (1.98)$$

Aplicăm teorema impulsului proiectată pe axa Ox astfel încât să avem $Fdt = d(mv_x)$, ținând seama de impulsul care intră și cel care iese din elementul de volum dV . Astfel, avem:

$$F_x = (p + \Delta p)\Delta S - p\Delta S = \Delta p\Delta S,$$

iar variația masei Δ_m se realizează ca urmare a variației densității ce se propagă cu viteza c va fi:

$$\Delta(mv) = (\Delta m)c = c\Delta p\Delta S\Delta x$$

dar $\Delta x = c\Delta t$ și avem

$$\Delta(mv) = c^2\Delta S\Delta\rho\Delta t$$

Aplicând teorema impulsului obținem:

$$\Delta p\Delta S\Delta t = c^2\Delta S\Delta\rho\Delta t$$

sau

$$\frac{\Delta p}{\Delta\rho} = c^2$$

iar la limită când $\Delta\rho \rightarrow 0$ avem

$$\lim_{\Delta\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta p}{\Delta\rho} = \frac{dp}{d\rho} = c^2. \quad (1.99)$$

Relația (1.99) stabilește viteza de propagare a undei longitudinale într-un mediu elastic atunci când se cunoaște ecuația de stare $p = p(\rho)$.

Ținând seama de relația (1.99) putem scrie variația densității ρ în raport cu timpul astfel:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\frac{\partial p}{\partial t}}{\frac{\partial p}{\partial\rho}} = \frac{1}{c} \frac{\partial p}{\partial t}, \quad (1.100)$$

iar ecuația de continuitate (1.98) devine:

$$\operatorname{div} \bar{v} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} = 0. \quad (1.101)$$

Asupra relației (1.89) aplicăm operatorul div , iar asupra relației (1.101) operatorul $\frac{\partial}{\partial t}$, știind că aceștia sunt comutativi, iar $\operatorname{div} \rho$ și $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ sunt cantități mici avem:

$$\operatorname{div} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) = -\frac{1}{\rho} \operatorname{div}(\operatorname{grad} p), \quad (1.102)$$

$$\rho \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{v}) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}. \quad (1.103)$$

Din relația (1.102) obținem:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = -\rho \operatorname{div} \left(\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \right) = -\rho \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \bar{v}),$$

care împreună cu (1.103) duce la relația :

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (1.104)$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} p) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2},$$

dar

astfel încât ecuația de propagare a undelor poate fi pusă sub forma

$$\Delta p = \frac{1}{c} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2}, \quad (1.105)$$

unde $\Delta p = \operatorname{lapp}$ este laplaceanul (operatorul lui Laplace) de forma

$$\operatorname{lapp} = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

1.9.2. Ecuația de propagare a undelor într-un solid elastic

Folosim ecuațiile lui Hooke generalizate, de forma

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] & \gamma_{yz} &= \frac{1}{G} \tau_{yz} \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] & \gamma_{zx} &= \frac{1}{G} \tau_{zx}\end{aligned}\quad (1.106)$$

de unde deducem tensiunile $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ și obținem

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_x & \tau_{xy} &= G \gamma_{xy} \\ \sigma_y &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_y & \tau_{yz} &= G \gamma_{yz} \\ \sigma_z &= \lambda \varepsilon + 2G \varepsilon_z & \tau_{zx} &= G \gamma_{zx}\end{aligned}\quad (1.107)$$

în care λ și G sunt parametrii lui Lamé de forma

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

în care λ și G sunt parametrii lui Lamé de forma

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

iar cum ε s-a notat dilatația volumică de forma $\varepsilon = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$.

Deformațiile specifice funcție de deplasările u, v și w sunt de forma

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\quad (1.108)$$

Ecuțiile lui Cauchy pentru cazul spațial sunt

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + Y &= 0 \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + Z &= 0\end{aligned}\quad (1.109)$$

care împreună cu (1.97) și (1.98) duc la obținerea ecuațiilor lui Lamé, astfel

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + G \Delta u + X &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + G \Delta v + Y &= 0 \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + G \Delta w + Z &= 0\end{aligned}\quad (1.110)$$

unde X, Y, Z sunt forțele de inerție pentru mediul elastic în mișcare. Acestea au următoarea structură:

$$\begin{aligned}X &= -\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ Y &= -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ Z &= -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (1.111)$$

Introducând (1.111) în (1.110), obținem

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + G \Delta u &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} + G \Delta v &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \\ (\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} + G \Delta w &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\end{aligned}\quad (1.112)$$

Pentru găsirea ecuațiilor undelor vom deriva prima ecuație parțial în raport cu x , a doua ecuație în raport cu y și a treia ecuație în raport cu z și la adunăm.

Astfel, avem:

$$\begin{aligned}(\lambda + G) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + G \frac{\partial}{\partial x} \Delta u &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \rho \\ (\lambda + G) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + G \frac{\partial}{\partial y} \Delta v &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \rho \\ (\lambda + G) \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} + G \frac{\partial}{\partial z} \Delta w &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \rho\end{aligned}\quad (1.113)$$

iar prin însumare obținem:

$$\begin{aligned} & (\lambda + G) \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} \right) + G \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial z} \right) = \\ & = \rho \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + \rho \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \quad (1.114)$$

Folosim următoarele posibilități de operare și anume:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial z^2} = \Delta \varepsilon; \\ & \frac{\partial \Delta u}{\partial x} + \frac{\partial \Delta v}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial z} = \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \Delta \varepsilon; \\ & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Astfel, relația (1.114) se poate scrie sub forma:

$$(\lambda + G)\Delta \varepsilon + G\Delta \varepsilon = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}.$$

Introducând $c^2 = \frac{\lambda + 2G}{\rho}$, avem $(\lambda + G)\Delta \varepsilon = \rho \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}$ sau

$$\Delta \varepsilon = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2}, \quad (1.115)$$

care reprezintă ecuația undelor longitudinale în solidul elastic perturbat pe cele trei direcții simultan, perturbația fiind reprezentată în acest caz de variația de volum ε .

1.9.2.1. Viteza de propagare a undelor longitudinale într-un solid elastic

Considerăm că perturbația se propagă pe direcția axei Ox a elementului de volum cu laturile dx, dy, dz. Ca urmare a acțiunii presiunii p pe fața cu laturile dy și dz, muchia dx devine $dx + \varepsilon_x dx$ și presupunem că celelalte muchii nu se modifică. Din condiția de conservare a masei elementului de volum avem

$$\rho_0 dx dy dz = \rho (1 + \varepsilon_x) dx dy dz, \quad ,$$

de unde

$$\varepsilon_x = 1 + \frac{\rho_0}{\rho} \quad (1.116)$$

În relațiile (1. 106) introducem condițiile impuse și anume

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= 1 + \frac{\rho_0}{\rho}; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_z = 0; \\ \sigma_x &= -p, \end{aligned}$$

și obținem

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [-p - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ 0 &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_z - p)] \\ 0 &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(-p + \sigma_y)] \end{aligned} \quad (1.117)$$

iar din ultimele două relații avem:

$$\begin{aligned}\sigma_y - \nu\sigma_z + \nu p &= 0 \\ -\nu\sigma_y + \sigma_z + \nu p &= 0 \\ \sigma_y = \sigma_z &= -\frac{\nu p}{1-\nu}.\end{aligned}$$

de unde

(1.118)

Astfel, obținem pentru ε_x expresia

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[-p + \frac{2\nu^2 p}{1-\nu} \right] = \frac{p}{E} \left[\frac{-1+\nu+2\nu^2}{1-\nu} \right], \\ \varepsilon_x &= -\frac{p(1+\nu)(1-2\nu)}{E(1-\nu)}.\end{aligned}$$

sau

(1.119)

Ținând seama de (1.116) avem

$$-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{p}{E} = 1 + \frac{\rho_0}{\rho},$$

care derivată în raport cu p duce la relația:

$$-\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)E} \frac{\partial p}{\partial \rho} = -\rho_0 \frac{1}{\rho^2}.$$

Pentru $\rho = \rho_0$ se obține expresia vitezei de propagare a undelor longitudinale în solidul elastic, astfel

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_0 = \frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{\lambda+2G}{\rho}. \quad (1.120)$$

1.9.2.2. Ecuațiile de propagare a undelor transversale într-un solid elastic

În relația (1.112) derivăm prima ecuație în raport cu y și a doua ecuație în raport cu x , astfel

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial \Delta u}{\partial y} = \rho \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$(\lambda + G) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial \Delta v}{\partial x} = \rho \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

iar după scădere avem :

$$G \left[\frac{\partial}{\partial y} \Delta u - \frac{\partial}{\partial x} \Delta v \right] = \rho \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \right],$$

$$G \Delta \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right),$$

sau

iar în final avem

$$G \Delta \omega_z = \rho \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2},$$

$$\omega_z = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}.$$

unde

În relația (1.121) introducem $c_T^2 = \frac{\rho}{G}$, astfel încât avem:

$$\Delta \omega_z = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \omega_z}{\partial t^2}, \quad (1.122)$$

iar în mod similar obținem pentru axele O_x și O_y ecuațiile :

$$\Delta \omega_y = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \omega_y}{\partial t^2}, \quad (1.123)$$

$$\Delta \omega_x = \frac{1}{c_T^2} \frac{\partial^2 \omega_x}{\partial t^2}, \quad (1.124)$$

În relațiile (1.122), (1.123) și (1.124) mărimile $\omega_x, \omega_y, \omega_z$, reprezintă rotațiile în plane normale la axele Ox, Oy și respectiv Oz, care sunt și direcții de propagare a undei transversale.

Observație. Undele transversale se realizează fără variație de volum.

1.10. Ecuația de propagare a undelor plane

Notăm cu mărimea perturbatoare care se propagă cu viteza c și care va fi denumită în continuare perturbare. Mărimea Θ poate fi presiune, variație de volum, deformație etc., astfel încât ecuația undelor în forma generală poate fi

$$\Delta\Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} \quad (1.125)$$

Pentru a stabili condițiile în care sunt posibile undele plane vom căuta soluții de formă complexă cu ajutorul funcției $\tilde{\Phi}$, astfel

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 e^{i[\omega t \pm (k_x x + k_y y + k_z z)]} \quad (1.126)$$

este pulsația vibrațiilor particulelor;

unde: ω

$\bar{k}(k_x, k_y, k_z)$ - vector constant care exprimă numărul de undă tridimensional, denumit și *vector de undă*

Derivatele funcției complexe $\tilde{\Phi}$ dată de relația (1.125) sunt de forma:
o derivatele de ordinul întâi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial x} &= ik_x \tilde{\Phi} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial y} &= ik_y \tilde{\Phi} \\ \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial z} &= ik_z \tilde{\Phi} \end{aligned} \quad (1.126.1)$$

- derivatele de ordin doi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial x^2} &= -k_x^2 \tilde{\Phi} & \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial z^2} &= -k_z^2 \tilde{\Phi} \\ \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial y^2} &= -k_y^2 \tilde{\Phi} & \frac{\partial^2 \tilde{\Phi}}{\partial t^2} &= -\omega^2 \tilde{\Phi} \end{aligned} \quad (1.126.2)$$

Înlocuind (1.126.2) în (1.125) avem:

$$\tilde{\Phi}(-k_x^2 - k_y^2 - k_z^2) = \frac{1}{c^2}(-\omega^2 \tilde{\Phi}),$$

de unde rezultă condiția de verificare a ecuației (1.125),

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 \quad (1.127)$$

în care. $k = \frac{\omega}{c}$ este modulul vectorului de undă \vec{k} .

În acustică, mărimea perturbatoare ϕ este de natura unei presiuni, adică în loc de $\tilde{\phi}$ vom opera cu mărimea

$$\tilde{p} = \tilde{p}_{\max} e^{j[\omega t \pm (k_x x + k_y y + k_z z)]} \quad (1.128)$$

Din expresia (1.128) trebuie să deducem viteza v a particulelor, motiv pentru care vom folosi relația lui Euler de forma:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \tilde{p}. \quad (1.129)$$

Ținem seama de faptul că pentru o expresie complexă de forma

$\tilde{z} = z_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$, derivata este dată de relația:

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial t} = i\omega z_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = i\omega \tilde{z},$$

caz în care, în mod similar, $\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = i\omega \tilde{v}$, avem, sau având în vedere că $\omega = ck$ obținem:

$$\frac{\partial \tilde{v}}{\partial t} = ick \tilde{v}. \quad (1.130)$$

$$ick \tilde{v} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \tilde{p}$$

Din relațiile (1.129) și (1.121) obținem expresia , de

$$\text{unde: } \tilde{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{ick} \text{grad } \tilde{p} \quad (1.131)$$

$$\tilde{v} = \frac{i}{\rho ck} \text{grad } \tilde{p}.$$

sau

Dacă unda se propagă numai pe direcția Ox, atunci în loc de grad \tilde{p} , vom

avea $\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}$ iar expresia (1. 122) devine

$$\tilde{v}_x = \frac{i}{k_x \rho c} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x}. \quad (1.132)$$

Astfel, pentru $\tilde{p} = p_{\max} e^{i(\omega t - k_x x)}$, avem

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = -k_x p_{\max} i e^{i(\omega t - k_x x)} = -ik_x \tilde{p}$$

iar (1.132) devine

$$\tilde{v}_x = -\frac{i^2}{\rho c} \tilde{p} = \frac{1}{\rho c} \tilde{p} \quad (1.133)$$

În relația (1. 133), introducem expresiile funcțiilor complexe

$$\tilde{v}_x = v e^{i(\omega t - \varphi)} = v [\cos(\omega t - \varphi) + i \sin(\omega t - \varphi)]$$

$$\tilde{p} = p_{\max} e^{i(\omega t - k_x x)} = p_{\max} [\cos(\omega t - k_x x) + i \sin(\omega t - k_x x)]$$

în care împreună cu condiția de identitate se obțin duc la următoarele rezultate

$$v = \frac{p_{\max}}{\rho c}; \quad \varphi = k_x x, \quad \text{unde} \quad k_x = \frac{\omega}{c}.$$

În acest caz, $v_x = \text{Re } \tilde{v}_x = v \cos(\omega t - \varphi)$, adică

$$v_x = \frac{p_{\max}}{\rho c} \cos(\omega t - k_x x). \quad (1.134)$$

Astfel, pe baza expresiei $p = \text{Re } \tilde{p} = p_{\max} \cos(\omega t - k_x x)$ și a relației

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$$

putem obține viteza de vibrație a particulelor pe direcția Ox, după cum urmează

$$v_x = -\frac{1}{\rho} \int \frac{\partial p}{\partial x} dt \quad (1.135)$$

în care $\frac{\partial p}{\partial x} = -k_x p_{\max} [-\sin(\omega t - k_x x)] = k_x p_{\max} \sin(\omega t - k_x x)$. (1.135.1)

Înlocuind (1.135.1) în (1.135) și efectuând integrarea, avem:

de unde
$$v_x = -\frac{1}{\rho} \int k_x p_{\max} \sin(\omega t - k_x x) dt$$

$$v_x = -\frac{k_x p_{\max}}{\omega \rho} [-\cos(\omega t - k_x x)],$$

iar în final, ținând seama de $\omega = ck_x$, avem

$$v_x = \frac{p_{\max}}{\rho c} \cos(\omega t - k_x x). \quad (1.136)$$

1.11 Ecuația de propagare a undelor sferice

Folosim ecuația generală a undelor de forma:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

sau

(1.137)

cu ajutorul căreia căutăm soluția $\Phi = \Phi(r)$ care definește existența undelor sferice în spațiul euclidian. Mărimea perturbatoare $\Phi(r)$ pentru unda sferică depinde de distanța $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ de la sursa perturbatoare până la un punct oarecare $M(x, y, z)$ din spațiul Oxyz.

Pentru a putea utiliza ecuația undelor este necesar să determinăm derivatele parțiale de ordinul doi, astfel

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial x} &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= \frac{y}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} &= \frac{z}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{r} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) = \left[\frac{1}{r} \frac{\partial x}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) \frac{\partial r}{\partial x} = \\ &= \left[\frac{1}{r} + x \left(-\frac{r'}{r^2} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{x}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \frac{x}{r} = \left[\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} \right] \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{r^2 - x^2}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{x^2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}.\end{aligned}$$

În mod similar obținem

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{r^2 - y^2}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{y^2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}; \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \frac{r^2 - z^2}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{z^2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},\end{aligned}$$

caz în care $\Delta \Phi$ devine

$$\Delta \Phi = \frac{3r^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{r^3} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2},$$

$$\Delta \Phi = \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}.$$

sau

(1.138)

Ecuația undelor (1.137), pe baza relației (1.138) devine

$$\frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{1}{c^2} r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2},$$

sau

(1.139)

unde

$$2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \Phi)$$

$$r \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r \Phi)$$

caz în care ecuația undelor poate fi exprimată sub forma :

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\Phi) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\Phi) \quad (1.140)$$

Soluția generală se poate scrie sub forma specifică unei progăve, astfel:

$$r\Phi = f_1(r - ct) + f_2(r + ct),$$

$$\Phi = \frac{1}{r} [f_1(r - ct) + f_2(r + ct)]. \quad (1.141)$$

sau

Primul termen al soluției de forma:

$$\Phi_1 = \frac{1}{r} f_1(r - ct) \quad (1.142)$$

reprezintă o undă sferică ce se propagă de la sursă cu viteza c în sensul crescător al razei vectoriale \vec{r} .

Al doilea termen al soluției

$$\Phi_2 = \frac{1}{r} f_2(r + ct) \quad (1.143)$$

reprezintă o undă sferică ce se propagă cu aceeași viteză în sensul descrescător al razei vectoriale \vec{r} , adică este convergentă în sursa O .

De regulă, interesul cel mai mare îl prezintă unda sferică directă dată de relația (1.142) care are drept mncție perturbatoare presiunea generată de sursă. Astfel, soluția (1. 142) în complex este de forma:

$$\tilde{p} = \frac{1}{r} p_{\max} e^{i(\omega t - kr)} \quad (1.144)$$

Viteza particulelor \tilde{v} cu relația (1.132) astfel:

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \frac{i}{\rho kc} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} = \frac{i}{\rho kc} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} p_{\max} e^{i(\omega t - kr)} \right] = \frac{i}{\rho kc} \left[-\frac{1}{r^2} p_{\max} e^{i(\omega t - kr)} - \frac{1}{r} p_{\max} i k e^{i(\omega t - kr)} \right] = \\ &= \frac{i}{\rho kc} \left[\frac{-1 - kri}{r^2} \right] p_{\max} e^{i(\omega t - kr)} = \frac{1}{\rho c} \left[\frac{-i}{kr} + 1 \right] \frac{1}{r} p_{\max} e^{i(\omega t - kr)}. \end{aligned}$$

sau

$$\tilde{v} = \frac{1}{\rho c} \left(1 + \frac{1}{ikr} \right) \tilde{p}. \quad (1.145)$$

În studiul mărimilor undelor acustice sferice utilizăm expresiile (1.144) și (1.145) care au amplitudini și faze constante pe o suprafață sferică cu raza r ,

originea fiind centrul perturbației. Această precizare este în concordanță cu principiul lui Huygens referitor la undele sferice și evoluția lor în timp și spațiu.

1.11.1 Mărimi caracteristice ale undelor sferice

a) Impedența acustică a undelor sferice

Prin definiție impedența acustică \tilde{Z} în formulare complexă este dată de relația:

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{p}}{\tilde{v}}, \quad (1.146)$$

în care introducând expresiile \tilde{p} și \tilde{v} date de relațiile (1.144) și (1.145) avem:

$$\tilde{Z} = \rho c \frac{ikr}{ikr + 1} \quad (1.147)$$

sau ținând seama de egalitatea $k = \frac{\omega}{c}$ putem scrie:

$$\tilde{Z} = \frac{i\omega\rho_0 r}{ikr + 1} \quad (1.148)$$

Dacă $r \rightarrow \infty$ sau $r \gg \lambda$ ($kr = 2\pi \frac{r}{\lambda}$) rezultă:

$$\tilde{Z} \cong \rho_0 c \quad (1.149)$$

ceea ce corespunde unei plane, adică suprafața sferică se transformă într-o suprafață plană.

b) Intensitatea acustică

Folosim relația $I = p v$, pe baza căreia determinăm intensitatea acustică medie \bar{I} , astfel:

$$\bar{I} = \frac{1}{T} \int_0^T p v dt \quad (1.150)$$

unde pentru p și v se consideră numai partea reală a expresiilor complexe \tilde{p} și \tilde{v} .

Astfel, avem:

$$\tilde{p} = \frac{P_{\max}}{r} [\cos(\omega t - kr) + i \sin(\omega t - kr)]$$

$$\begin{aligned} \tilde{v} &= \frac{1}{\rho c} \left(1 + \frac{1}{ikr} \right) \frac{P_{\max}}{r} [\cos(\omega t - kr) + i \sin(\omega t - kr)] = \\ &= \frac{P_{\max}}{\rho c r} \left\{ \left[\cos(\omega t - kr) + \frac{1}{kr} \sin(\omega t - kr) \right] + i \left[\sin(\omega t - kr) - \frac{1}{kr} \cos(\omega t - kr) \right] \right\}, \end{aligned}$$

de unde obținem

$$p = \operatorname{Re} \tilde{p} = \frac{P_{\max}}{r} \cos(\omega t - kr) \quad (1.151)$$

$$v = \operatorname{Re} \tilde{v} = \frac{P_{\max}}{\rho c r} \cos(\omega t - kr) + \frac{P_{\max}}{\rho c k r^2} \sin(\omega t - kr) \quad (1.152)$$

Introducând (1.151) și (1.152) în (1.150) și efectuând integrala avem

$$\bar{I} = \frac{P_{\max}^2 k}{2r^2 \omega \rho_0} = \frac{\left(\frac{P_{\max}}{r} \right)^2}{2} \frac{1}{\rho c} = \frac{\tilde{p}_{ef}^2}{\rho c} \quad (1.153)$$

c) *Densitatea de energie acustică*

Pentru densitatea de energie acustică, aplicăm relația $\bar{E} = \frac{1}{c} \bar{I}$, astfel avem

$$\bar{E} = \frac{1}{\rho c^2} \tilde{p}_{ef}^2 \quad (1.154)$$

Energia radiată de sursă este $W = \bar{I} S = 4\pi r^2 \bar{I}$, sau :

$$W = \frac{2\pi}{\rho c} p_{\max}^2 \quad (1.155)$$

care este o valoare constantă pentru fiecare suprafață sferică cu centrul în sursă.

1.12. Proprietățile undelor

Analiza proprietăților undelor acustice se bazează pe acumulările științifice din optică. Astfel, se va defini noțiunea de "rază acustică" ca fiind direcția de propagare a undei și care este perpendiculară pe frontul undei plane. De asemenea, procesul propagării undelor va fi analizat cu ajutorul principiului lui Huygens, care arată că punctele conținute de frontul de undă la un moment dat t generează unde sferice elementare a căror suprafață înfășurătoare (loc geometric) reprezintă un nou front de undă la momentul $t + \Delta t$.

1.12.1. Reflexia și transmisia undelor

a) Propagarea normală a undelor pe o suprafață rigidă

În figura 1.12 este reprezentată o suprafață plană rigidă și opacă pentru unda plană incidentă care se propagă în sensul axei Ox.

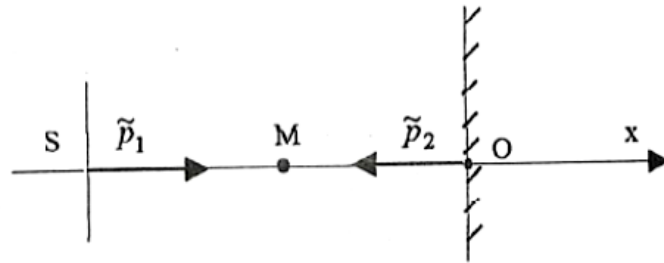


Fig. 1.12

Unda directă se propagă în sensul pozitiv al axei Ox și are ecuația:

$$\tilde{p}_1 = \bar{A}e^{i(\omega t - kx)}$$

iar unda reflectată de suprafața rigidă se propagă în sensul negativ al axei Ox și are ecuația $\tilde{p}_2 = \bar{B}e^{i(\omega t + kx)}$.

Presiunea p într-un punct M oarecare se va scrie sub forma:

$$\tilde{p} = \tilde{p}_1 + \tilde{p}_2 = \bar{A}e^{i(\omega t - kx)} + \bar{B}e^{i(\omega t + kx)} \quad (1.156)$$

Viteza particulelor în punctul considerat este

$$\tilde{v} = \frac{i}{\rho kc} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{i}{\rho kc} \left[-ik\bar{A}e^{i(\omega t - kx)} + ik\bar{B}e^{i(\omega t + kx)} \right],$$

iar în punctul O ce aprține peretelui rigid, adică pentru $x = 0$, trebuie ca $\tilde{v} = 0$ oricare ar fi timpul t . În acest caz, avem:

$$\tilde{v}(0) = \frac{1}{\rho c} [\bar{A} - \bar{B}] e^{i\omega t} = 0,$$

$$\bar{A} = \bar{B}$$

de unde: (1.157)

Coeficientul de reflexie pentru presiuni \bar{R} este:

$$\bar{R} = \frac{\bar{B}}{\bar{A}} = 1, \quad (1.158)$$

caz în care presiunea totală este de forma:

$$\tilde{p} = \bar{A} e^{i(\omega t - kx)} + \bar{A} e^{i(\omega t + kx)} = 2\bar{A} e^{i\omega t} \cos kx \quad (1.159)$$

Cu ajutorul relației (1.159) se determină viteza rezultantă a particulelor, astfel:

$$\tilde{v} = \frac{i}{\rho kc} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{i}{\rho kc} (-2k\bar{A} e^{i\omega t} \sin kx),$$

$$\tilde{v} = \frac{-2i\bar{A}}{\rho c} e^{i\omega t} \sin kx.$$

sau (1.160)

Se ține seama de modul de scriere a numerelor complexe \bar{A} și $i\bar{A}$, sub forma:

$$\bar{A} = A e^{i\varphi}$$

$$i\bar{A} = e^{i\frac{\pi}{2}} A e^{i\varphi} = A e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$$

caz în care relațiile (1.159) și (1.160) devin:

$$\tilde{p} = 2A e^{i\varphi} e^{i\omega t} \cos kx, \quad (1.161)$$

$$\tilde{p} = 2A \cos kx [\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)]$$

$$\tilde{v} = -\frac{2}{\rho c} \bar{A} e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} e^{i\omega t} \sin kx,$$

$$\tilde{v} = -\frac{2A}{\rho c} \sin kx \left[\cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

Expresiile reale ale lui \tilde{p} și \tilde{v} sunt

(1.162)

(1.163)

Se observă că viteza este decalată cu $\frac{\pi}{2}$ în raport cu presiunea, iar reflexia unei de presiune se realizează fără schimbare de fază în timp ce viteza se reflectă cu schimbare de fază. În punctul O al peretelui rigid, cele două viteze componente ale aceleiași particule sunt opuse, fapt ce rezultă din condiția ca viteza rezultantă a particulei să fie nulă tot timpul.

Notă: Presiunea p și viteza v a particulelor sunt mărimi instantanee.

b) *Propagarea normală a undelor pe suprafața de separație a două medii elastice extinse la infinit*

În figura 1.13 se consideră două medii elastice separate între ele prin suprafața plană (P), de ecuație $x = 0$.

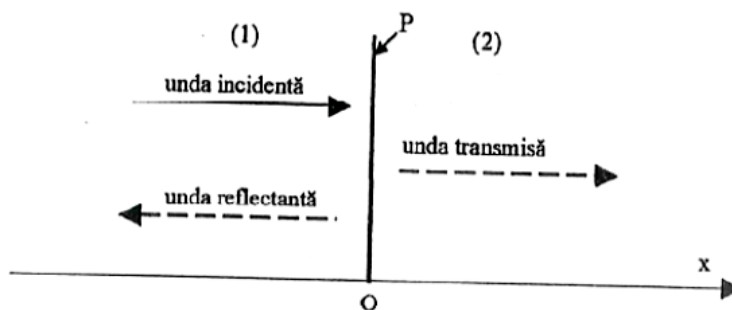


Fig. 1.13

Interacțiunea dintre o undă incidentă pe o suprafață normală de separație dintre două medii elastice distincte, notate cu (1) și (2), având și respectiv p_2, c_2 , se caracterizează prin faptul că o parte din energia acestora este reflectată în primul mediu și restul este transmisă în mediul al doilea.

Presiunile în cele două medii pot fi scrise astfel

$$\tilde{p}_1 = A_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}, \quad (1.164)$$

$$\tilde{p}_2 = \bar{A}_2 e^{i(\omega t - k_2 x)}, \quad (1.165)$$

iar vitezele particulelor în cele două medii vor fi

$$p = 2A \cos kx \cos(\omega t + \varphi),$$

$$v = -\frac{2A}{\rho c} \sin kx \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\tilde{v}_1 = \frac{i}{\rho_1 k_1 c_1} \left[-k_1 i \bar{A}_1 e^{i(\omega t - k_1 x)} + k_1 i \bar{B}_1 e^{i(\omega t + k_1 x)} \right]; \quad (1.166)$$

$$\tilde{v}_2 = \frac{i}{\rho_2 k_2 c_2} \left[-k_2 i \bar{A}_2 e^{i(\omega t - k_2 x)} \right]. \quad (1.167)$$

Pe suprafața de separație ($x = 0$), în oricare punct presiunile și vitezele trebuie să fie aceleași pentru orice moment de timp t . Aceasta înseamnă că trebuie îndeplinite condițiile

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1(0) &= \tilde{p}_2(0); \\ \tilde{v}_1(0) &= \tilde{v}_2(0), \end{aligned}$$

astfel încât pe baza relațiilor (1.164), (1.165), (1.166) și (1.167), avem

$$\begin{aligned} (\bar{A}_1 + \bar{B}_1) e^{i\omega t} &= A_2 e^{i\omega t}; \\ \frac{1}{\rho_1 c_1} (\bar{A}_1 - \bar{B}_1) e^{i\omega t} &= \frac{1}{\rho_2 c_2} \bar{A}_2 e^{i\omega t}, \end{aligned} \quad (1.168)$$

care trebuie să fie îndeplinite pentru orice moment de timp t . Astfel, obținem

$$\begin{aligned} \bar{A}_1 + \bar{B}_1 &= \bar{A}_2 \\ (1.168) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\rho_1 c_1} (\bar{A}_1 - \bar{B}_1) = \frac{1}{\rho_2 c_2} \bar{A}_2. \quad (1.169)$$

Mediile elastice 1 și 2 sunt caracterizate prin impedanța acustică $Z_1 = \rho_1 c_1$ și $Z_2 = \rho_2 c_2$ respectiv, fapt constatat în relația (1.169).

Impedanța acustică relativă z se definește ca fiind raportul impedanțelor celor două medii, adică

$$z = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}. \quad (1.170)$$

În acest caz, pe baza relațiilor (1.168), (1.169) și (1.170), coeficientul de reflexie și factorul de transmisie acustică se obțin astfel

$$\bar{R} = \frac{\bar{B}_1}{\bar{A}_1} \quad (1.171.1)$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}. \quad (1.171.2)$$

Din relațiile (1.168) și (1.169) se elimină A_2 și avem

$$\text{sau } z(\bar{A}_1 - \bar{B}_1) = \bar{A}_1 + \bar{B}_1, \quad (1.172)$$

$$\text{de unde } z\bar{A}_1 - \bar{A}_1 = \bar{B}_1 + z\bar{B}_1, \quad (1.173)$$

$$\bar{R} = \frac{\bar{B}_1}{\bar{A}_1} = \frac{z-1}{z+1}$$

Pentru $\bar{T} = \frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1}$ din (1.168) și (1.169) eliminăm \bar{B}_1 și obținem

$$\text{sau } z(\bar{A}_1 - \bar{A}_2 + \bar{A}_1) = \bar{A}_2, \quad (1.174)$$

de unde

$$\bar{T} = \frac{\bar{A}_2}{\bar{A}_1} = \frac{2z}{z+1}.$$

Presiunea undei reflectate $\bar{B}_1 = \bar{P}_r$ și respectiv presiunea undei transmise în mediul al doilea $\bar{A}_2 = \bar{P}_t$, rezultă din (1.173) și (1.174), astfel:

$$\bar{P}_r = \bar{B}_1 = \frac{z-1}{z+1} \bar{A}_1, \quad (1.175)$$

$$\bar{P}_t = \bar{A}_2 = \frac{2z}{z+1} \bar{A}_1. \quad (1.176)$$

În tabelul 1.4 se dau valorile impedanței specifice pentru unele materiale uzuale și medii de propagare a undelor acustice.

Nr. crt.	Mediul elastic	Viteza de propagare, c (m/s)	Densitatea, ρ_0 (kg/m ³)	Impedanța acustică specifică Z_s (kg/m ² s)
1	Aer (la 20°C)	344	1,2	414
2	Apă (la 13°C)	1441	1000	$144 \cdot 10^4$
3	Plută	500	250	$12 \cdot 10^4$
4	Lemn de brad	4700	510	$240 \cdot 10^4$
5	Lemn de stejar	4100	720	$290 \cdot 10^4$
6	Cauciuc	40+200	1000+2000	$(4+40) \cdot 10^4$
7	Nisip uscat	100+170	1400+1600	$(14+27) \cdot 10^4$
8	Zidărie cărămidă	4000	1800	$720 \cdot 10^4$
9	Beton	4000	2000	$800 \cdot 10^4$
10	Sticlă	6000	2400	$1440 \cdot 10^4$
11	Oțel	5100	7900	$4000 \cdot 10^4$
12	Aluminiu	5200	2700	$1400 \cdot 10^4$
13	Plumb	2130	11400	$2428 \cdot 10^4$
14	Cupru	3500	8900	$3100 \cdot 10^4$

b) Propagarea oblică a undelor pe o suprafață de separație rigidă

În figura 1.14 se prezintă suprafața plană de separație a celor două medii elastice 1 și 2 cu precizarea că suprafața de separație este rigidă.

În acest caz, suprafața fiind rigidă, undele incidente se reflectă în mediul din care au provenit, iar transmisia în mediul doi este anulată. Pe suprafață se va exercita o anumită presiune a undei incidente, iar viteza normală a particulelor de pe suprafață va fi nulă, adică $v_x = 0$ la $x = 0$.

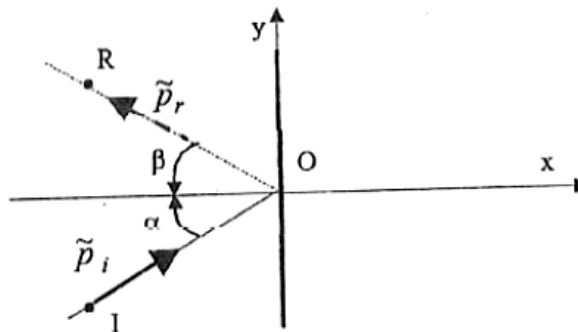


Fig. 1.14

Cu ajutorul unghiurilor de incidență α și reflexie β , putem exprima presiunile undei incidente \tilde{p}_i și undei reflectate \tilde{p}_r , sub forma:

unde

$$\begin{aligned}\tilde{p}_i &= \bar{A}_i e^{i(\omega t - kIO)}; \\ \tilde{p}_r &= \bar{A}_r e^{i(\omega t - kOR)},\end{aligned}\tag{1.177}$$

avem:

$$\begin{aligned}IO &= x \cos \alpha + y \sin \alpha; \\ OR &= -x \cos \beta + y \sin \beta,\end{aligned}\tag{1.178}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p}_i &= \bar{A}_i e^{i[\omega t - k(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]}, \\ \tilde{p}_r &= \bar{A}_r e^{i[\omega t - k(-x \cos \beta + y \sin \beta)]}.\end{aligned}$$

Viteza \tilde{v}_x va avea expresia

$$\tilde{v}_x = \frac{t}{\rho kc} \frac{\partial(\tilde{p}_i + \tilde{p}_r)}{\partial x} = \frac{i}{\rho kc} \left(-ki \cos \alpha \bar{A}_i e^{i\Omega_1} + ki \cos \beta \bar{A}_r e^{i\Omega_2} \right)$$

$$\Omega_1 = \omega t - k(x \cos \alpha + y \sin \alpha),$$

$$\Omega_2 = \omega t + k(x \cos \alpha - y \sin \alpha),$$

unde

și efectuând operațiile elementare, avem:

$$\tilde{v}_x = \frac{1}{\rho c} \left\{ \bar{A}_i \cos \alpha e^{i[\omega t - k(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]} - \bar{A}_r \cos \beta e^{i[\omega t - k(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]} \right\}.$$

Impunem condiția ca pe suprafața rigidă de separație cu $x=0$, viteza să fie nulă, adică $\tilde{v} = 0$, oricare ar fi $y = R$ și $t \in R$. Astfel, avem

$$\frac{1}{\rho c} \left\{ \bar{A}_i \cos \alpha e^{i[\omega t - ky \sin \alpha]} - \bar{A}_r \cos \beta e^{i[\omega t - ky \sin \beta]} \right\} = 0,$$

de unde rezultă că această condiție este satisfăcută pentru oricare valoare a lui $y \in R$ și $t \in R$, dacă

$$\bar{A}_i = \bar{A}_r;$$

$$\alpha = \beta.\tag{1.179}$$

În concluzie, amplitudinile celor două unde trebuie să fie egale, iar unghiul de incidență trebuie să fie egal cu unghiul de reflexie.

Ținând seama de (1.179) se poate determina expresia presiunii

$$\tilde{p} = \tilde{p}_i + \tilde{p}_r \text{ într-un punct oarecare, astfel}$$

$$\begin{aligned}\tilde{p} &= \tilde{p}_i + \tilde{p}_r, \text{ într-un punct oarecare, astfel} \\ \tilde{p} &= \tilde{p}_i + \tilde{p}_r = \bar{A}_i \left\{ e^{i[\omega t - k(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]} + e^{i[\omega t + k(x \cos \alpha - y \sin \alpha)]} \right\} = \\ &= \bar{A}_i \left\{ e^{i[\omega t - ky \sin \alpha]} \cdot \left(e^{-ikx \cos \alpha} + e^{ikx \cos \alpha} \right) \right\} = \\ &= \bar{A}_i e^{i[\omega t - ky \sin \alpha]} [\cos(kx \cos \alpha) - i \sin(kx \cos \alpha) + \cos(kx \cos \alpha) + i \sin(kx \cos \alpha)]\end{aligned}$$

$$\text{sau} \quad \tilde{p} = 2\bar{A}_i e^{i(\omega t - ky \sin \alpha)} \cos(kx \cos \alpha) \quad (1.180)$$

Expresia vitezei particulelor într-un punct oarecare din spațiul mediului de reflexie este de forma:

$$\tilde{v}_x = \frac{i}{\rho kc} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{i}{\rho kc} 2\bar{A}_i e^{i(\omega t - ky \sin \alpha)} [-k \cos \alpha \sin(kx \cos \alpha)]$$

$$\text{sau} \quad \tilde{v}_x = -\frac{2i\bar{A}_i}{\rho kc} \cos \alpha \sin(kx \cos \alpha) e^{i(\omega t - ky \sin \alpha)}. \quad (1.181)$$

c) *Propagarea oblică a undelor la o suprafață de separație între două medii elastice*

În figura 1.15 se reprezintă suprafața elastică de separație sub forma unui plan raportat la sistemul de axe Oxy, unde axa Ox este normală la plan. În acest caz, în primul mediu vom avea o *undă incidentă* i , ce se propagă sub unghiul de incidență α în raport cu normala Ox și o *undă reflectată* r ce se propagă sub unghiul de reflexie β . În mediul al doilea, se propagă o *undă transmisă* t sau *undă refractată*, sub unghiul de refracție θ , în raport cu axa Ox.

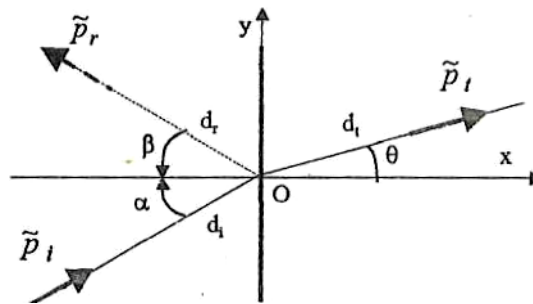


Fig. 1.15

Distanțele variabile care apar în ecuațiile celor trei unde se scriu în raport cu sensul normalei la frontul de undă, astfel

$$\begin{aligned}d_i &= x \cos \alpha + y \sin \alpha \\d_r &= -x \cos \beta + y \sin \beta \\d_t &= x \cos \theta + y \sin \theta.\end{aligned}$$

Expresiile complexe ale presiunilor din fronturile de undă corespunzătoare celor trei unde sunt

$$\tilde{p}_i = \bar{A}_i \cdot e^{i[\omega t - k_1(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]}, \quad (1.182)$$

$$\tilde{p}_r = \bar{A}_r \cdot e^{i[\omega t - k_1(-x \cos \beta + y \sin \beta)]}, \quad (1.183)$$

$$\tilde{p}_t = \bar{A}_t \cdot e^{i[\omega t - k_2(x \cos \theta + y \sin \theta)]}. \quad (1.184)$$

Viteza particulelor proiectată pe axa Ox, în cazul fiecărei unde, va fi:

- pentru unda incidentă

$$\tilde{v}_{ix} = \frac{i}{\rho_1 k_1 c_1} \frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial x} = \frac{i \bar{A}_i}{\rho_1 k_1 c_1} [-ik_1 \cos \alpha] e^{i[\omega t - k_1(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]}$$

$$\tilde{v}_{ix} = \frac{\bar{A}_i \cos \alpha}{\rho_1 c_1} e^{i[\omega t - k_1(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]}$$

sau

(1.185)

- pentru unda reflectantă

$$\tilde{v}_{rx} = \frac{i}{\rho_1 k_1 c_1} \frac{\partial \tilde{p}_r}{\partial x} = \frac{i \bar{A}_r}{\rho_1 k_1 c_1} [-ik_1 \cos \beta] e^{i[\omega t - k_1(-x \cos \beta + y \sin \beta)]},$$

$$\tilde{v}_{rx} = -\frac{\bar{A}_r \cos \beta}{\rho_1 c_1} e^{i[\omega t - k_1(-x \cos \beta + y \sin \beta)]}$$

sau

(1.186)

- pentru unda transmisă

$$\tilde{v}_{tx} = \frac{i}{\rho_2 k_2 c_2} \frac{\partial \tilde{p}_t}{\partial x} = \frac{i \bar{A}_t}{\rho_2 k_2 c_2} [-ik_2 \cos \theta] e^{i[\omega t - k_2(x \cos \theta + y \sin \theta)]}$$

$$\tilde{v}_{tx} = -\frac{\bar{A}_t \cos \theta}{\rho_2 c_2} e^{i[\omega t - k_2(x \cos \theta + y \sin \theta)]}$$

sau

(1.187)

Pentru o particulă ce aparține suprafeței de contact, ținând seama de cele două fețe ce aparțin celor două medii elastice definite, se impun condițiile:

$$\tilde{p}_i + \tilde{p}_r = \tilde{p}_t \quad \text{la } x = 0 \quad (1.188)$$

$$\tilde{v}_{ix} + \tilde{v}_{rx} = \tilde{v}_{tx} \quad \text{la } x = 0 \quad (1.189)$$

Planul de separație a celor două medii elastice are ecuația $x = 0$, ceea ce implică următoarele expresii pentru presiunea undelor, astfel

$$\tilde{p}_i(0) = \bar{A}_i \cdot e^{i[\omega t - k_1 y \sin \alpha]},$$

$$\tilde{p}_r(0) = \bar{A}_r \cdot e^{i[\omega t - k_1 y \sin \beta]},$$

$$\tilde{p}_t(0) = \bar{A}_t \cdot e^{i[\omega t - k_2 y \sin \theta]},$$

caz în care (1.188) poate fi scrisă sub forma:

$$\bar{A}_i \cdot e^{i[\omega t - k_1 y \sin \alpha]} + \bar{A}_r \cdot e^{i[\omega t - k_1 y \sin \beta]} = \bar{A}_t \cdot e^{i[\omega t - k_2 y \sin \theta]}. \quad (1.190)$$

Pentru viteze în planul de separație $x = 0$, avem

$$\tilde{v}_{ix}(0) = \frac{\bar{A}_i \cos \alpha}{\rho_1 c_1} \cdot e^{i[\omega t - k_1 y \sin \alpha]};$$

$$\tilde{v}_{rx}(0) = -\frac{\bar{A}_r \cos \beta}{\rho_1 c_1} \cdot e^{i[\omega t - k_1 y \sin \beta]},$$

$$\tilde{v}_{tx}(0) = \frac{\bar{A}_t \cos \theta}{\rho_2 c_2} \cdot e^{i[\omega t - k_2 y \sin \theta]},$$

situație în care relația (1.189) poate fi scrisă sub forma :

$$\frac{\bar{A}_i \cos \alpha}{\rho_1 c_1} \cdot e^{i[\omega t - k_1 y \sin \alpha]} - \frac{\bar{A}_r \cos \beta}{\rho_1 c_1} \cdot e^{i[\omega t - k_1 y \sin \beta]} = \frac{\bar{A}_t \cos \theta}{\rho_2 c_2} \cdot e^{i[\omega t - k_2 y \sin \theta]}$$

sau simplificând cu $e^{i\omega t}$, avem

$$\frac{\bar{A}_i \cos \alpha}{\rho_1 c_1} \cdot e^{ik_1 y \sin \alpha} - \frac{\bar{A}_r \cos \beta}{\rho_1 c_1} \cdot e^{ik_1 y \sin \beta} = \frac{\bar{A}_t \cos \theta}{\rho_2 c_2} \cdot e^{-ik_2 y \sin \theta}$$

Pentru ca relația (1.192) să fie satisfăcută pentru orice valoare a ordonatei y , este necesar ca exponenții ce conțin pe y să fie egali, adică

$$\begin{aligned} & -ik_1 y \sin \alpha = -ik_1 y \sin \beta = -ik_2 y \sin \theta, \\ \text{de unde avem:} \quad & k_1 \sin \alpha = k_1 \sin \beta = k_2 \sin \theta. \end{aligned} \quad (1.193)$$

Din (1.193) obținem două relații și anume

$$\begin{aligned} & \sin \alpha = \sin \beta, \\ \text{adică} \quad & \alpha = \beta, \end{aligned} \quad (1.194)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} = \frac{k_1}{k_2} = \frac{c_2}{c_1}. \end{aligned} \quad (1.195)$$

Relația (1.195) este cunoscută ca fiind *legea lui Snellius* (1591 -1626).

Cu aceste concluzii, ținând seama de relațiile (1.194) și (1.195), condițiile (1.190) și (1.192) devin:

$$\begin{cases} \bar{A}_i + \bar{A}_r = \bar{A}_t \\ (\bar{A}_i - \bar{A}_r) \frac{\cos \alpha}{\rho_1 c_1} = \bar{A}_t \frac{\cos \theta}{\rho_2 c_2} \end{cases} \quad (1.196)$$

Coefficientul de reflexie \bar{R} și factorul de transmitere pot fi determinați, astfel:

$$\bar{R} = \frac{\bar{A}_r}{\bar{A}_i}; \quad (1.197)$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{A}_t}{\bar{A}_i}. \quad (1.198)$$

Notând cu $z = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$ impedanța acustică relativă din (1.196) avem:

$$\begin{aligned} & (\bar{A}_i - \bar{A}_r) z \cos \alpha = \bar{A}_t \cos \theta, \\ \text{sau} \quad & \bar{A}_i z \cos \alpha - \bar{A}_r z \cos \alpha = \bar{A}_t \cos \theta + \bar{A}_r \cos \theta \\ & \bar{A}_i (z \cos \alpha - \cos \theta) = \bar{A}_r (z \cos \alpha + \cos \theta) \\ \text{de unde:} \quad & \bar{R} = \frac{\bar{A}_r}{\bar{A}_i} = \frac{z \cos \alpha - \cos \theta}{z \cos \alpha + \cos \theta}, \end{aligned} \quad (1.199)$$

$$\bar{T} = \frac{\bar{A}_t}{\bar{A}_i} = \frac{2z \cos \alpha}{z \cos \alpha + \cos \theta}. \quad (1.200)$$

Raportul dintre energia reflectată W_r și energia incidentă W_i se numește

coeficient de reflexie sau reflectantă $\rho_r = \frac{W_r}{W_i}$, iar raportul dintre energia

transmisă și energia incidentă se numește *coeficient de transmitere sau*

transmitantă $\tau_T = \frac{W_t}{W_i}$

Astfel, avem pentru energii următoarele expresii:

$$\begin{aligned} W_i &= \frac{\bar{A}_i^2}{2\rho_1 c_1} S \cos \alpha; \\ W_r &= \frac{\bar{A}_r^2}{2\rho_1 c_1} S \cos \beta; \\ W_t &= \frac{\bar{A}_t^2}{2\rho_2 c_2} S \cos \theta, \end{aligned}$$

iar ρ_R și τ_T , ținând seama că, avem :

$$\rho_R = \frac{W_r}{W_i} = \left(\frac{\bar{A}_r}{\bar{A}_i} \right)^2 \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} - \left(\frac{z \cos \alpha - \cos \theta}{z \cos \alpha + \cos \theta} \right)^2; \quad (1.201)$$

$$\tau_T = \frac{W_t}{W_i} = \left(\frac{\bar{A}_t}{\bar{A}_i} \right)^2 \frac{\cos \theta}{\cos \alpha} \frac{1}{z} = \frac{4z \cos \alpha \cos \theta}{(z \cos \alpha + \cos \theta)^2}. \quad (1.202)$$

Se observă că $\rho_R + \tau_T = 1$.

În funcție de unghiul de incidență α , avem:

$$\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha \right)^2}$$

caz în care \bar{R} și \bar{T} pot fi exprimați astfel :

$$\bar{R} = \frac{z \cos \alpha - \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha \right)^2}}{z \cos \alpha + \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha \right)^2}}, \quad (1.203)$$

$$\bar{T} = \frac{2z \cos \alpha}{z \cos \alpha + \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha\right)^2}}. \quad (1.204)$$

Din legea lui Snellius, rezultă că atunci când unda sonoră incidentă trece din mediul 1 în mediul 2, cu $c_1 < c_2$, unghiul de refracție Θ este mai mare ca unghiul de incidență α , adică $\Theta > \alpha$ (fig. I. 16).

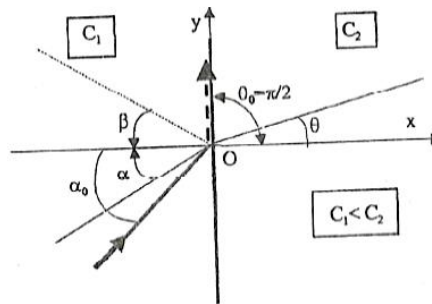


Fig. 1.16

Rezultă că la unghiul limită, unda refractată se va afla chiar în planul de separație, iar raza refractată din mediul 2 dispăre, în acest caz s-a produs fenomenul de *reflexie totală*.

Din relația (1.195) avem $\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \alpha_0} = \frac{c_2}{c_1}$, de unde:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\sin \alpha_0} = \frac{c_2}{c_1}, \quad (1.205)$$

în care este unghiul de incidență limitată.

De asemenea, când unda sonoră trece dintr-un mediu în care viteza de propagare este mai mare, într-un mediu în care viteza de propagare este mai mică ($c_1 > c_2$), atunci unghiul de refracție scade, raza acustică transmisă apropiindu-se de normala la interfață (fig. 1,17).

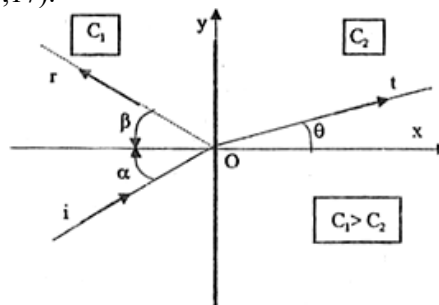


Fig. 1.17

Propagarea sunetului în atmosferă este condiționată de temperatura aerului care se modifică pe înălțime și duce la variația vitezei de propagare dată de relația:

$$c = c_0 \sqrt{1 + \alpha t},$$

unde: c_0 este viteza de propagare a sunetului la 0°C ;

α - coeficientul de dilatație volumică;

t - temperatura, în $^\circ\text{C}$.

Temperatura atmosferică scade cu înălțimea de la 25°C la suprafața pământului, la -55°C la altitudinea de 25 km, iar apoi se modifică crescător până la $+25^\circ\text{C}$ la 50 km (fig. 1.18).

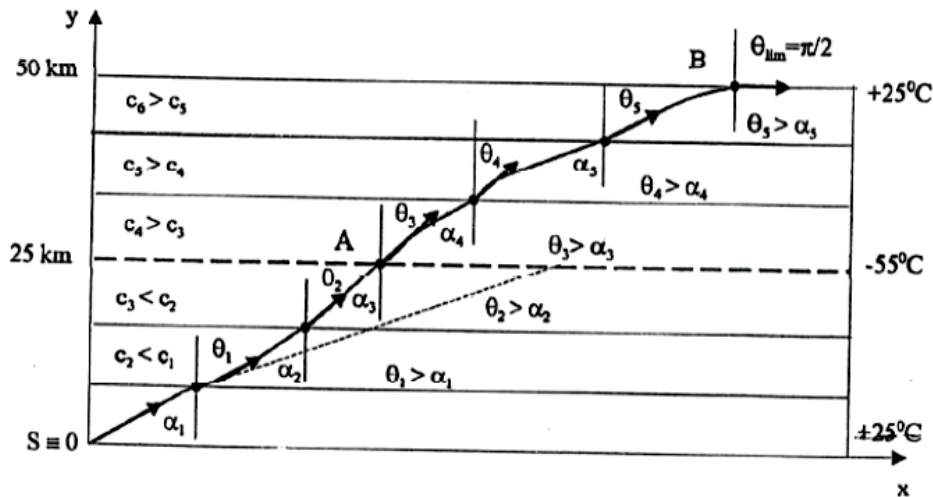


Fig. 1.18

Pentru intervalul de altitudine $y \in (0, 25\text{km})$ temperatura scade de la $+25^\circ\text{C}$ la -55°C ceea ce face ca vitezele de propagare să fie din ce în ce mai mici, adică $c_2 < c_1$, ceea ce înseamnă că unghiul de refracție scade adică unda sonoră se apropie de normala verticală a interfaței dintre două straturi de aer. Acesta înseamnă că (11), până în punctul A unde raza acustică trece într-un strat de aer cu viteza de propagare mai mare, adică c_3 . În intervalul $y \in (25\text{km}, 50\text{km})$ viteza de propagare este crescătoare ceea ce face ca unghiul de refracție să se mărească adică unda transmisă se îndepărtează de normala verticală până în punctul B unde se produce reflexia totală (fig. 1.18). Din acest punct procesul de propagare se realizează prin refracții succesive parcurgându-se același strat în sens invers până când este

atinsă suprafața pământului într-un punct I unde undele sunt recepționate clar (fig. 1. 19). Distanța SI este cea de 200 km evidențiindu-se efectul de "umbră sonoră", adică într-o zonă învecinată sursei undele sonore sunt recepționate slab pentru ca numai la distanța de sute de kilometri de sursă ele să fie recepționate foarte bine. Din punctul I undele sonore sunt reflectate și procesul de propagare se repetă.

Acest mod de propagare a stat la baza explicațiilor privind recepționarea zgomotului produs de exploziile nucleare la distanțe foarte mari.

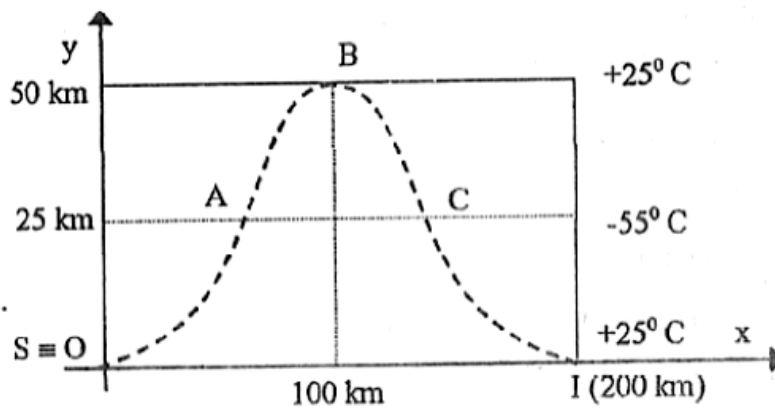


Fig. 1.19

Un fenomen similar se produce și în cazul zonei lacurilor sau fluviilor atunci când odată cu lăsarea serii straturile de aer din imediata vecinătate a luciului apei sunt mai reci decât cele superioare. În acest caz sunetele emise străbat straturile superioare până la reflexia totală după care unda acustică parcurge straturile în sens invers propagându-se într-un punct îndepărtat la nivelul suprafeței pământului. Aceasta face ca sunete foarte slabe să poată fi auzite foarte bine la distanțe mari de locul de producere, în special noaptea când există o stratificare a aerului rece-cald.

1.12.2. Absorbția sunetului în mediu

1.12.2.1. Absorbția volumică a sunetului

Considerăm că mediul elastic de propagare a undelor plane are proprietăți de disipare a energiei. În cazul unei surse sferice de unde acustice se constată că intensitatea sunetului perceput scade cu distanța adică energia emisă se atenuază. Acest fapt se datorește unui proces de divergență în propagare prin care energia emisă este repartizată pe suprafețe sferice cu raze crescătoare. În context, intensitatea energiei pe unitatea de suprafață descrește cu pătratul razei sferei, respectiv al distanței între sursă și receptor.

Pe de altă parte, atenuarea sunetului se datorește absorbției energiei unei sonore de către mediul disipativ în care se propagă. Astfel, procesul de absorbție a energiei are mai multe cauze dintre care menționăm:

- efectul vâscozității manifestat prin frecarea internă a mediului care duce la transformarea energiei acustice parțial în căldură;

- efectul conductibilității termice ca rezultat al ridicării temperaturii straturilor comprimate în raport cu cele rarefiate. Acesta face ca să se elibereze căldură radiantă în exterior, evident cu pierderea unei părți din energia acustică;

- efectul schimbului intermolecular de energie în special la undele cu frecvență de excitație egală sau mai mică cu frecvența proprie a moleculelor mediului.

În cazul mediului nedisipativ, expresia complexă a presiunii undelor plane progresive este $\tilde{p} = \bar{A}e^{i(\omega t - kx)}$,

unde $k = \frac{\omega}{c}$ este numărul de undă.

În cazul mediului disipativ se introduce factorul de absorbție din partea mediului, prin modulul de elasticitate complex $\tilde{E} = E(1 + i\eta)$ unde η este constanta de absorbție a energiei din partea mediului și definește unghiul intern de pierdere a energiei $\eta = \tan\phi$.

Ținând seama că $c^2 = \frac{E}{\rho}$, pentru \tilde{E} vom avea \tilde{c} , se poate scrie

de unde

$$c^2 = \frac{E}{\rho}, \quad \tilde{c}^2 = \frac{\tilde{E}}{\rho} = \frac{E}{\rho}(1 + i\eta) = c^2(1 + i\eta),$$

$$\tilde{c} = c\sqrt{1 + i\eta}, \quad (1.206)$$

În acest caz numărul de undă complex \tilde{k} este:

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{\tilde{c}} = \frac{\omega}{c\sqrt{1 + i\eta}},$$

iar pentru valori mici ale lui η , putem dezvolta în serie Mac Laurin în jurul lui $\eta = 0$ și avem:

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{2} \eta i \right], \quad (1.207)$$

sau

$$\tilde{k} = \frac{\omega}{c} \left[1 - \frac{1}{2} \eta i \right], \quad (1.208)$$

unde am notat $\tilde{\gamma} = i\tilde{k}$ este constanta de propagare a unei cu α și β de forma

$$i\tilde{k} = \frac{\omega}{c} i + \frac{\omega}{2c} \eta = i\beta + \alpha = \tilde{\gamma},$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{\omega}{c} \eta \text{ este constantă de atenuare ;}$$

$$\beta = \frac{\omega}{c} - \text{constanta de fază}$$

Cu relația (1.208) presiunea undei poate fi scrisă sub forma:

$$\tilde{p} = \bar{A} e^{i(\omega t - \tilde{k}x)} = \bar{A} e^{i\omega t} e^{-i\tilde{k}x}$$

sau
$$\tilde{p} = \bar{A} e^{i\omega t} e^{-\tilde{\gamma}x} = \bar{A} e^{i\omega t} e^{-(\alpha+i\beta)x},$$

$$\tilde{p} = \bar{A} e^{-\alpha x} e^{i(\omega t - \beta x)}. \quad (1.209)$$

În relația (1.209) parametrul fizic α are semnificația decrementului logaritmic al amplitudinii presiunii pe unitatea de lungime, adică:

$$\ln \frac{\bar{A} e^{-\alpha x}}{\bar{A} e^{-\alpha(x+1)}} = \ln e^{\alpha} = \alpha$$

Parametrul $\beta = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ reprezintă schimbarea de fază pe unitatea de lungime, adică faza mișcării este βx iar variația ei pe unitatea de lungime $x = 1$, în procesul de propagare pe axa Ox , este $\beta(x+1) - \beta x = \beta$.

Pentru un proces simulatoriu staționar cu pulsația ω constantă, viteza de propagare constantă și disiparea dată, parametrul fizic α va fi o *constantă de atenuare*. Astfel, constanta de atenuare $\alpha = \frac{\omega}{2c} \eta$ crește cu pulsația ω și scade cu

viteza de propagare c . Aceasta înseamnă că sunetele cu frecvență înaltă sunt atenuate într-o pondere mai mare decât sunetele de frecvență joasă. De exemplu zgomotele foarte puternice ale unei explozii, ale unui tun de artilerie la trageri, sau cele ale unui avion sunt percepute la distanțe mari ca zgomote "înăbușite" adică cu frecvențe joase, deoarece frecvențele înalte au fost atenuate în aer.

De asemenea, propagarea ultrasunetelor în aer se face cu mare atenuare, în mod imperceptibil, dar în lichide și solide atenuarea este aproape neglijabilă din cauza vitezei mari de propagare a undelor în lichide și solide comparativ cu aerul.

1.12.2.2. Absorbția superficială a sunetului

Considerăm că în raport cu suprafața de separație a două medii elastice avem fluxul de energie sonoră incidentă Φ_i și fluxul de energie reflectată Φ_r astfel încât putem defini coeficientul de absorbție superficială a sunetului sub forma:

$$\alpha_s = \frac{\Phi_i - \Phi_r}{\Phi_i} = 1 - \frac{\Phi_r}{\Phi_i} \quad (1.210)$$

Pentru un punct din spațiu de propagare pe direcția normală la suprafața de separație presiunea, viteza și coeficientul de reflexie sunt:

$$\tilde{p} = \bar{A}e^{i(\omega t - kx)} + \bar{B}e^{i(\omega t + kx)} = \bar{A}e^{i\omega t}e^{-ikx} + \bar{R}\bar{A}e^{i\omega t}e^{ikx},$$

sau
$$\tilde{p} = \bar{A} \left[e^{-ikx} + \bar{R}e^{ikx} \right] e^{i\omega t}. \quad (1.211)$$

unde se menționează că $\tilde{p} = \tilde{p}_i + \tilde{p}_r$,

$$\tilde{v} = \frac{i}{\rho kc} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} = \frac{i}{\rho kc} \bar{A} \left[-kie^{-ikx} + \bar{R}kie^{ikx} \right] e^{i\omega t},$$

sau
$$\tilde{v} = \frac{\bar{A}}{\rho c} \left[e^{-ikx} - \bar{R}e^{ikx} \right] e^{i\omega t}, \quad (1.212)$$

în care precizăm că $\tilde{v} = \tilde{v}_i + \tilde{v}_r$.

$$\bar{Z} = \frac{\tilde{p}(0)}{\tilde{v}(0)} \text{ pentru } x=0,$$

sau
$$\bar{Z} = \frac{\bar{A}(1 + \bar{R})e^{i\omega t}}{\frac{\bar{A}}{\rho c}(1 - \bar{R})e^{i\omega t}} = \rho c \frac{1 + \bar{R}}{1 - \bar{R}},$$

în care notăm $\bar{\chi} = \frac{\bar{Z}}{\rho c}$ și obținem :

$$\bar{R} = \frac{\bar{\chi} - 1}{\bar{\chi} + 1}. \quad (1.213)$$

Puterea unei incidente este:

$$\tilde{p}_i \tilde{v}_i = [\bar{A} e^{-ikx} e^{i\omega t}] \left[\frac{\bar{A}}{\rho c} e^{-ikx} e^{i\omega t} \right],$$

sau

$$\tilde{p}_i \tilde{v}_i = \frac{\bar{A}^2}{\rho c} e^{-2ikx} e^{2i\omega t} \quad (1.214)$$

Puterea unei reflectate este:

$$\tilde{p}_r \tilde{v}_r = [\bar{R}\bar{A} e^{ikx} e^{i\omega t}] \left[\frac{\bar{A}}{\rho c} \bar{R} e^{ikx} e^{i\omega t} \right],$$

sau

$$\tilde{p}_r \tilde{v}_r = \frac{A^2}{\rho c} \bar{R}^2 e^{2ikx} e^{2i\omega t}. \quad (1.215)$$

Deoarece puterea este fluxul pe unitatea de suprafață în unitatea de timp, făcând raportul relațiilor (1.215) la (1.214) avem:

$$\alpha_s = 1 - \left| \frac{\tilde{p}_r \tilde{v}_r}{\tilde{p}_i \tilde{v}_i} \right|, \quad (1.216)$$

sau

$$\alpha_s = 1 - |\bar{R}|^2, \quad (1.217)$$

în care $\bar{R} = \frac{\bar{x} - 1}{\bar{x} + 1}$, unde $\bar{x} = \frac{\bar{Z}}{\rho c}$, iar cu \bar{Z} s-a notat impedanța peretelui, ρ și c fiind destinate și respectiv viteza de propagare a sunetului în aer.

Coeficienții de absorbție acustică se determină experimental pentru materialele componente ale structurii fonoabsorbante. În cazul unei camere care conține mai multe suprafețe cu materiale diferite având ariile individuale S_1, S_2, \dots, S_n și coeficienții $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ se poate defini un coeficient de absorbție mediu cu ajutorul relației

$$\alpha_m = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_j S_j}{\sum_{j=1}^n S_j}, \quad (1.218)$$

care se aplică în studiul și proiectarea incintelor fonoabsorbante.

3

ACUSTICA INCINTELOR

3.1. Elemente de acustică ondulatorie a incintei

Caracteristicile de propagare ale undelor sonore au un rol determinant în procesele de distribuție, atenuare sau amplificare a energiei sonore într-o încălă închisă. Astfel, având în vedere lungimile de undă diferite, fazele undelor cu valori variate în diverse puncte din spațiul geometric interior se poate aprecia că în încălă au loc procese de interferență cu concentrări discrete de energie care duc la formarea unui câmp sonor neuniform. Rolul primordial în realizarea câmpului sonor în interiorul incintei îl are configurația geometrică a încălării (formă și dimensiuni) și caracteristicile ondulatorii ale sursei plasate în interior.

3.1.1. Propagarea undelor acustice neamortizate în spații închise

Considerăm o încălă paralelipipedică, cu pereții perfect reflectanți, iar sursa sonoră este plasată în originea O a sistemului de axe rectangulare $Oxyz$, propagarea undelor făcându-se în spațiul tridimensional menționat.

Lungimile muchiilor paralelipipedului sunt l_x , l_y , l_z în conformitate cu fig. 3.1.

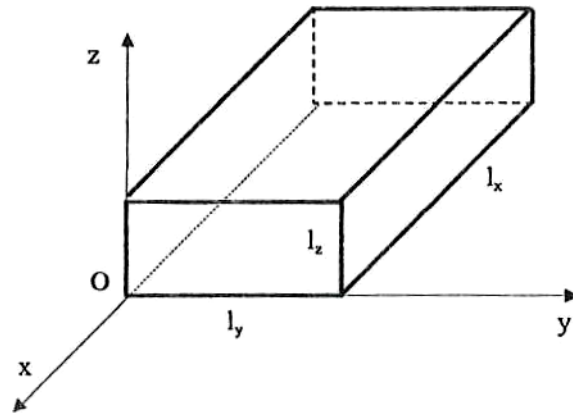


Fig. 3.1

Adoptăm ipoteza că pereții sunt rigizi așa încât viteza particulei de aer în contact cu peretele este nulă, adică pentru $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x = l_x$, $y = l_y$, $z = l_z$ vitezele sunt $v_x = v_y = v_z = 0$.

Ecuția undei acustice în coordonate carteziene în funcție de potențialul Φ poate fi scrisă astfel

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0 \quad (3.1)$$

Pentru soluție, aplicăm metoda separării variabilelor, astfel încât avem:

$$\Phi(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t) \quad (3.2)$$

Derivatele parțiale ale funcției Φ în raport cu X , Y , Z și T sunt

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} YZT \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} XZT \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} XYT \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} XYZ \end{aligned} \quad (3.3)$$

Pentru ca $\Phi(x, y, z, t)$ să fie soluție, trebuie ca funcția Φ dată de relația (3.2) și derivatele conform relațiilor (3.3) să verifice ecuația cu derivate parțiale (3.1). Astfel, avem

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} YZT + \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} XZT + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} XYT - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} XYZ = 0,$$

Acustica interioară pentru construcții și mașini
pe care o împărțim prin XYZT și obținem

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{1}{Z} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

Deoarece funcția $\Phi(x,y,z,t)$ trebuie să fie periodică în raport cu timpul în conformitate cu evoluția fizică a semnalului acustic trebuie să impunem soluția

$$\frac{1}{c^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = -\frac{\omega^2}{c^2},$$

de unde avem

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0, \quad (3.5)$$

a cărei soluție este:

$$T = A_t \cos(\omega t - \psi_t) \quad (3.6)$$

în care constantele de integrare sunt A_t și iar ψ_t iar ω este pulsația proprie a sunetului emis de sursa S plasată în O.

În ecuația (3.4) cei patru termeni sunt independenți, iar pentru a obține o sumă nulă trebuie ca fiecare termen în parte să fie constant. Astfel, primul termen constant $\frac{\omega^2}{c^2}$ a fost ales să satisfacă existența unei mișcări oscilatorii în timp.

Următorul termen trebuie să țină seama de constanta introdusă astfel încât putem scrie

$$\frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\frac{\omega_z^2}{c^2} + \mu$$

unde avem

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \mu \right) Z = 0 \quad (3.7)$$

cu soluția de forma

$$Z = A_z \cos(k_z z - \psi_z). \quad (3.8)$$

unde $k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \mu$, iar A_z și ψ_z sunt constante de integrare.

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \nu^2 Y = 0$$

Pentru ecuația în Y avem :

(3.9)

cu soluția

$$Y = A_y \cos(vy - \psi_y) \quad (3.10)$$

în care A_Y , Ψ_Y sunt constante de integrare, iar $k_z^2 = \mu^2 - v^2$

Pentru ecuația în X avem

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} - v^2 - \frac{\omega^2}{c^2} + \mu^2 = -\frac{\omega^2}{c^2}$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + (\mu^2 - v^2)X = 0$$

sau

(3.11)

cu soluția

$$X = A_x \cos(k_x x - \psi_x) \quad (3.12)$$

în care A_x și Ψ_x sunt constante de integrare.

Menționăm faptul că toate constantele alese ω , μ , v cât și combinațiile lor sunt astfel stabilite încât să ducă la existența mișcărilor periodice în variabilele curente t , x , y , și z .

Folosind soluțiile date de relațiile (3.6), (3.8), (3.10), și (3.12) pentru soluția generală dată de soluția (3,2) obținem:

$$\Phi(x, y, z, t) = A_x \cos(k_x x - \psi_x) A_y \cos(vy - \psi_y) A_z \cos(k_z z - \psi_z) A_t \cos(\omega t - \psi_t)$$

sau notând cu $A = A_x A_y A_z A_t$ avem

$$\Phi(x, y, z, t) = A \cos(k_x x - \psi_x) \cos(vy - \psi_y) \cos(k_z z - \psi_z) \cos(\omega t - \psi_t) \quad (3.13)$$

În expresia funcției Φ dată de (3.13) sunt conținute constantele introduse ω , μ , și v în scopul asigurării existenței mișcărilor oscilatorii periodice pe cele trei axe rectangulare. Aceste constante se determină din condiția impusă vitezei particulelor de aer pe suprafața pereților interiori ai încăperii paralelipipedice.

Astfel, avem:

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} \\v_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\v_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z}\end{aligned}\quad (3.14)$$

Cu $v_x = v_y = v_z = 0$ pentru planele $x=0$, $y=0$, $z = 0$, $x = l_x$, $y = l_y$, $z = l_z$ în conformitate cu ipoteza adoptată anterior.

Relațiile (3.14) cu condițiile necesare impuse vor fi în forma dezvoltată astfel

$$\begin{aligned}v_x &= \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -A k_x \sin(k_x x - \psi_x) \cos(\nu y - \psi_y) \cos(k_z z - \psi_z) \cos(\omega t - \psi_t); \\v_y &= \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -A \nu \cos(k_x x - \psi_x) \sin(\nu y - \psi_y) \cos(k_z z - \psi_z) \cos(\omega t - \psi_t); \\v_z &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} = -A k_z \cos(k_x x - \psi_x) \cos(\nu y - \psi_y) \sin(k_z z - \psi_z) \cos(\omega t - \psi_t).\end{aligned}$$

din condiția $x=y=z=0$ cu $v_x=v_y=v_z=0$ avem

$$\begin{aligned}0 &= -A k_x \sin(-\psi_x) \cos(-\psi_y) \cos(-\psi_z) \cos(\omega t - \psi_t); \\0 &= -A \nu \cos(-\psi_x) \sin(-\psi_y) \cos(-\psi_z) \cos(\omega t - \psi_t); \\0 &= -A k_z \cos(-\psi_x) \cos(-\psi_y) \sin(-\psi_z) \cos(\omega t - \psi_t),\end{aligned}$$

care sunt satisfăcute pentru orice moment de timp t cu $\cos(\omega t - \psi_t) \neq 0$ atunci când sinusurile sunt nule simultan, adică

$$\sin(-\psi_x) = \sin(-\psi_y) = \sin(-\psi_z) \equiv 0,$$

de unde avem

$$\psi_x = \psi_y = \psi_z = 0 \quad (3.15)$$

Dacă în (3.14) impunem condițiile rămase și anume $v_x=v_y=v_z=0$ pentru

$X = l_x, y = l_y, z = l_z$ și (3.15) obținem

$$\begin{aligned} 0 &= -Ak_x \sin l_x k_x \cos v l_y \cos k_z l_z \cos(\omega t - \psi_t); \\ 0 &= -Ak_y \cos l_x k_x \sin v l_y \cos k_z l_z \cos(\omega t - \psi_t); \\ 0 &= -Ak_z \cos l_x k_x \cos v l_y \sin k_z l_z \cos(\omega t - \psi_t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

care sunt satisfăcute pentru orice moment de timp t , cu $\cos(\omega t - \psi_t) \neq 0$ atunci când avem simultan

$$\sin l_x k_x = \sin v l_y = \sin k_z l_z = 0. \quad (3.17)$$

Căutând soluțiile ecuațiilor trigonometrice din (3.17) avem

$$k_x l_x = n_x \pi, \text{ cu } n_x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$v l_y = n_y \pi, \text{ cu } n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$k_z l_z = n_z \pi, \text{ cu } n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$$

sau

$$\sqrt{\mu^2 - v^2} = \frac{n_x}{l_x} \pi, \quad (3.18)$$

$$v = \frac{n_y}{l_y} \pi, \quad (3.19)$$

$$\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \mu^2} = \frac{n_z}{l_z} \pi \quad (3.20)$$

Din relațiile (3.18) și (3.19) eliminăm constanta v și obținem

$$\mu^2 = \left[\left(\frac{n_x}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y} \right)^2 \right] \pi^2. \quad (3.21)$$

Din relațiile (3.20) și (3.21) eliminăm constanta μ și obținem

$$\frac{\omega_n^2}{c^2} = \pi^2 \left[\left(\frac{n_x}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z} \right)^2 \right],$$

de unde

$$\omega_n = \pi c \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x} \right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y} \right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z} \right)^2}, \quad (3.22)$$

sau ținând seama că frecvențele f_n ale incintei sunt date de $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi}$, avem

$$f_n = \frac{1}{2} c \sqrt{\left(\frac{n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{n_z}{l_z}\right)^2}. \quad (3.23)$$

Valorile obținute de fa pentru diverse valori ale numerelor n_x , n_y , n_z care pot fi nule și întregi, constituie condițiile de existență ale soluției adoptate prin funcția Φ . Din punctul de vedere fizic, aceste valori ale lui f_n , adică f_1, f_2, \dots, f_n , reprezintă frecvențele proprii ale încăperii, adică frecvențele la care incinta "răspunde dinamic" intrând în rezonanță cu undele acustice emise de sursă care au aceleași frecvențe excitatoare. Ca urmare, pot lua naștere unde staționare cu ventre și noduri, aceasta înseamnă că în incintă vor exista puncte sau planuri în care la o anumită frecvență excitatoare se vor produce concentrări de energie dispuse neuniform în spațiul geometric al încăperii.

Aceste concentrări de energie generează neuniformitatea câmpului sonor care se intensifică pentru incinte care au număr mic de frecvențe proprii. Se remarcă faptul că frecvențele fundamentale corespunzătoare fiecărei direcții (de exemplu $n_x=1, n_y=0, n_z=0$) se obține un număr nedefinit de armonice superioare.

Ținem seama de relația dintre presiunea acustică și funcția Φ , de forma

$$\tilde{p} = -\rho_0 \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (3.24)$$

unde $\tilde{\Phi}(x, y, z, t)$, partea reală $\tilde{\Phi}(x, y, z, t) - \text{Re } \tilde{\Phi}$ de forma

$$\tilde{\Phi} = A \cos \omega_x x \cos \omega_y y \cos \omega_z z e^{i\omega t} \quad (3.25)$$

cu constanta $\Psi_t=0$. În acest caz, funcția complexă Φ poate fi scrisă astfel

$$\tilde{\Phi} = A \cos \omega_x x \cos \omega_y y \cos \omega_z z e^{i\omega t}, \quad (3.26)$$

sau

$$\tilde{\Phi} = A \cos\left(\frac{n_x \pi}{l_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{l_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{l_z} z\right) e^{i\omega t}. \quad (3.27)$$

Cu ajutorul relației (3.27) presiunea \tilde{p} dată de (3.24) va fi de forma

$$\tilde{p} = p_{\max} \cos\left(\frac{n_x \pi}{l_x} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{l_y} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{l_z} z\right) e^{i\omega t}. \quad (3.28)$$

În tabelul 3.1 se prezintă frecvențele proprii ale unei camere cu dimensiunile 6 x 4 X 3m care are volumul de 72 m³. Se constată că frecvențele proprii sunt în număr infinit și cresc în serie datorită valorilor numerelor întregi n_x , n_y și n_z .

Tabelul 3.1

n_x	n_y	n_z	f_{n_x, n_y, n_z}	n_x	n_y	n_z	f_{n_x, n_y, n_z}
1	0	0	28.3	1	1	1	76.3
0	1	0	42.5	0	2	1	77.0
1	1	0	51.07	2	0	1	80.2
0	0	1	56.6	3	0	0	84.9
2	0	0	56.6	0	2	0	85.0
1	0	1	63.4	1	2	0	89.3
0	1	1	70.8	3	1	0	89.3
2	1	0	70.8	2	1	1	90.9

Pentru asigurarea unor frecvențe acustice corespunzătoare privind inteligibilitatea vorbirii și reducerea punctelor de interferență este necesară o distribuție cât mai uniformă a frecvențelor proprii într-un spațiu geometric dat. În acest caz, dacă în incintă se va genera un sunet complex, atunci vor fi excitate în mod uniform toate frecvențele proprii cea ce duce la asigurarea unui câmp sonor uniform.

În tabelul 3.2 se dau unele corelații pentru o comportare acustică corespunzătoare a unei camere.

Tabelul 3.2

Elemente caracteristice	Rapoarte ale dimensiunilor	
	l_x/l_z	l_y/l_z
Volum mic	1.6	1.25
Volum mare	2.5	1.6
Tavan coborât	3.2	2.5
Lungime mare	3.2	1.25

Analizând relația (3.23) se constată că din punct de vedere geometric ea reprezintă expresia distanței dintre un punct și originea sistemului de axe $O f_x f_y f_z$, unde punctul din spațiu are coordonatele:

$$f_x = \frac{n_x c}{2l_x}, f_y = \frac{n_y c}{2l_y}, f_z = \frac{n_z c}{2l_z},$$

iar pentru $n_x = n_y = n_z = 1$ se obține cel mai apropiat punct cu coordonatele

$$\Delta f_x = \frac{c}{2l_x}, \Delta f_y = \frac{c}{2l_y}, \Delta f_z = \frac{c}{2l_z} \text{ (fig. 3.2).}$$

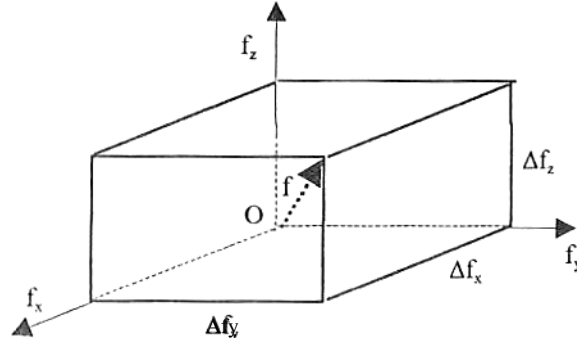


Fig. 3.2

Volumul unei incinte se divizează într-un număr mare de paralelipede elementare, astfel încât paralelipipedul etalon (fig. 3.2) să aibă laturile $\frac{1}{2} \frac{c}{l_x}, \frac{1}{2} \frac{c}{l_y}, \frac{1}{2} \frac{c}{l_z}$, iar frecvența proprie f este reprezentată prin vectorul care unește

originea cu vârful opus pe diagonală al paralelipipedului. Pentru o incintă oarecare, volumul acesteia se divizează în volume etalon $\Delta f_x \cdot \Delta f_y \cdot \Delta f_z$ (fig. 3.3.a) cu mențiunea că centrul fiecărui paralelipiped elementar, în poziția pe care o are, reprezintă vârful vectorului ce semnifică frecvența proprie corespunzătoare.

Deoarece sursa emisie acustică este considerată punctiformă amplasată în O , trebuie ca paralelipipedul incintei să fie raportat la o suprafață sferică, adică la frontul de undă sferică ce cuprinde spațiul închis. Aceasta înseamnă că în sistemul de axe ales, trebuie ca volumul V al paralelipipedului să fie egal cu volumul V_0 al suprafeței sferice care cuprinde acest paralelipiped. Suprafața sferică corespunzătoare închide $1/8$ din volumul sferei cu centrul în O și cu raza f_0 , unde f_0 este frecvența proprie corespunzătoare tuturor punctelor ce aparțin sferei. În acest, numărul N de frecvențe proprii cu valori mai mici decât frecvența f_0 rezultă din condiția ca volumul total al paralelipipedelor elementare să fie egal cu volumul optimii de sferă de rază n , aflat în octonul I (fig. 3.3.b). Astfel, avem volumul

unui paralelipiped elementar este:

$$V' = \frac{c^3}{8l_x l_y l_z},$$

iar volumul optimii de sferă este:

$$V_0 = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} f_0^3.$$

În condiția $NV = V_0$, avem $N \frac{c^3}{8l_x l_y l_z} = \frac{1}{8} \frac{4\pi}{3} f_0^3$, de unde, în primă

aproximație, obținem numărul N al frecvențelor proprii mai mici decât f_0 , astfel

$$N = \frac{4\pi}{3} l_x l_y l_z \frac{f_0^3}{c^3},$$

dar $l_x l_y l_z = V$ este volumul total al incintei, așa încât avem :

$$N = \frac{4\pi}{3} \frac{V f_0^3}{c^3}.$$

(3.29)

Numărul modurilor de vibrație axiale, corespunzând paralelipipedelor situate pe axele de coordonate N_a (fig. 3.3.c), se determină ca o distribuție liniară de tipul

$$N_{ax} = \frac{f_x}{\Delta x}; \quad N_{ay} = \frac{f_y}{\Delta y}; \quad N_{az} = \frac{f_z}{\Delta z} \quad ; \quad \text{și este dat de relația :}$$

$$N_a = \frac{f_x}{\Delta f_x} + \frac{f_y}{\Delta f_y} + \frac{f_z}{\Delta f_z} = \frac{f_x}{\frac{c}{2l_x}} + \frac{f_y}{\frac{c}{2l_y}} + \frac{f_z}{\frac{c}{2l_z}}$$

dar încadrarea în optimea de sferă înseamnă că $f_x = f_y = f_z = f_0$ ceea ce duce la

$$N_a = \frac{2f_0}{c} (l_x + l_y + l_z) = \frac{f_0 L}{2c}, \quad (3.30)$$

unde $L = 4(l_x + l_y + l_z)$ este perimetrul paralelipipedului (suma tuturor muchiilor).

Numărul N_a mai poate fi calculat și în funcție de raportul volumelor paralelipipedelor ce au ca axe de simetrie axele O_x , O_y și O_z , astfel încât volumul total $V_a = V_{ax} + V_{ay} + V_{az}$, unde, conform figurii 3.4 se pot calcula V_{ax} , V_{ay} , V_{az} .

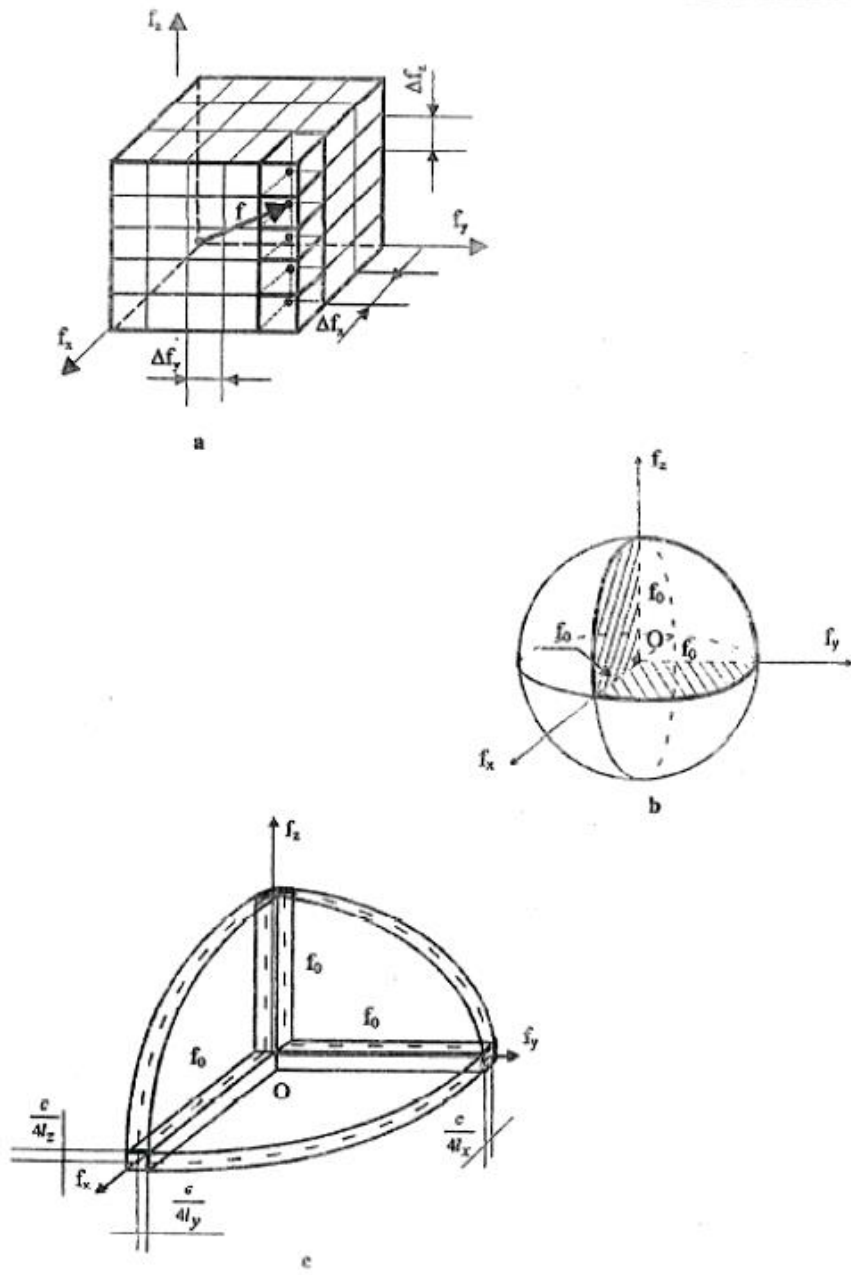


FIG. 3

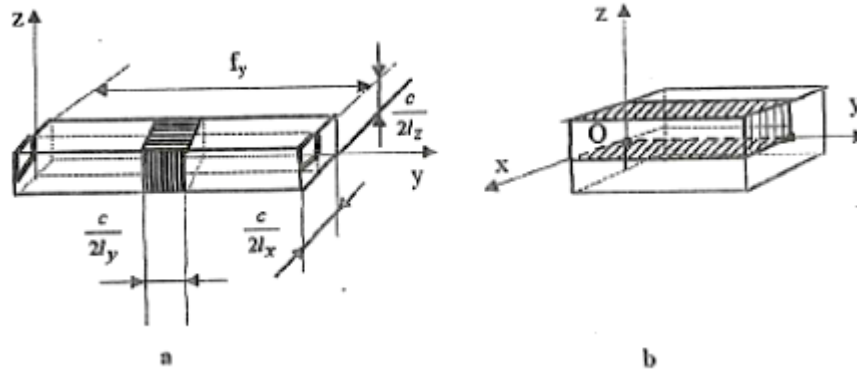


Fig. 3.4

Astfel, avem:

$$V_{ay} = \frac{c}{2l_x} \cdot \frac{c}{2l_z} f_y;$$

$$V_{az} = \frac{c}{2l_x} \cdot \frac{c}{2l_y} f_z;$$

$$V_{ax} = \frac{c}{2l_y} \cdot \frac{c}{2l_z} f_x.$$

Ținând seama de înscrierea în optimea de sferă cu raza $f_0 = f_x = f_y = f_z$,

avem:

$$V_a = \frac{c^2}{4} \left(\frac{f_x}{l_y l_z} + \frac{f_x}{l_x l_z} + \frac{f_z}{l_y l_z} \right) = \frac{c^2}{4} f_0 \frac{l_x + l_y + l_z}{l_x l_y l_z},$$

$$V_a = \frac{c^2 f_0 L}{4} \frac{1}{4V} = \frac{c^2 f_0 L}{16V}.$$

sau

Volumul paralelipipedului elementar este $V' = \frac{c^2}{8l_x l_y l_z} = \frac{c^2}{8V}$, astfel încât

$$N_a = \frac{V_a}{V'}, \text{ adică}$$

$$N_a = \frac{c^2 f_0 L}{16V} \frac{8V}{c^2} = \frac{1}{2} f_0 \frac{L}{c}.$$

Numărul frecvențelor proprii ale paralelipipedelor situate pe planele formate de axele de coordonate N_t (aceste frecvențe proprii mai sunt numite

tangentiale) va fi dat de relația: $N_t = \frac{S_0}{S_z} + \frac{S_0}{S_x} + \frac{S_0}{S_y} - N_a$,

unde: $S_0 = \frac{\pi}{4} f_0^2$ este aria unui sfert de cerc (urma lăsată de optimea de sferă pe planul axelor de coordonate);

- S_x, S_y, S_z aria dreptunghiului normală la axa Ox, Oy, Oz, ce aparține

$$\frac{c}{2l_x}, \frac{c}{2l_y}, \frac{c}{2l_z}.$$

paralelipipedului elementar cu laturile

Astfel, obținem

$$N_t = \frac{\frac{\pi f_0^2}{4}}{\frac{c}{2l_x} \frac{c}{2l_y}} + \frac{\frac{\pi f_0^2}{4}}{\frac{c}{2l_y} \frac{c}{2l_z}} + \frac{\frac{\pi f_0^2}{4}}{\frac{c}{2l_z} \frac{c}{2l_x}} - N_a = \frac{\pi f_0^2}{4} (l_x l_y + l_y l_z + l_z l_x) - \frac{f_0 L}{2c} \quad (3.31)$$

în care notăm cu $A = 2(l_x l_y + l_y l_z + l_z l_x) - \frac{f_0 L}{2c}$ aria laterală totală a incintei paralelipipedice, ceea ce duce la relația

$$N_t = \frac{\pi f_0^2 A}{2c^2} - \frac{f_0 L}{2c} \quad (3.32)$$

Pentru undele oblice, numărul N_{ob} corespunde volumului liber, neocupat de undele axiale și tangențiale și ținem seama de faptul că sunt normale la direcția lui f considerat ca vector de poziție al unui nod de rețea.

Astfel, avem
$$N_{ob} = N - N'_a - N'_t$$

unde: $N'_a = \frac{1}{4} N_a$ este numărul frecvențelor proprii ce aparțin paralelipipedelor

conținute pe cele trei axe, dar numai cele corespunzătoare volumului interior optimii de sferă,

adică $V_a = \frac{1}{4} V_a$ conform 3.4. b.

$N'_t = \frac{1}{4} N_t$ numărul frecvențelor proprii ce aparțin planelor axelor de

coordonate, dar numai celor corespunzătoare volumului interior al optimii de sferă, acesta fiind dat prin divizarea la jumătate a volumului celor trei sferturi de cilindru, având razan a sferei generatoare (fig. 3.3. c).

Astfel, avem

$$N_{ob} = N - \frac{1}{4} N_a - \frac{1}{2} N_t,$$

sau
$$N_{ob} = \frac{4\pi f_0^3}{3c^3} V - \frac{f_0 L}{8c} - \frac{\pi f_0^2 A}{4c^2} + \frac{f_0 L}{4c},$$

de unde
$$N_{ob} = \frac{4\pi f_0^3}{3c^3} V - \frac{\pi f_0^2 A}{4c^2} + \frac{f_0 L}{8}. \quad (3.33)$$

Numărul total de frecvențe proprii inferioare frecvenței date f_0 , pentru întreaga incintă de volum V și arie laterală totală A , cu laturile l_x, l_y, l_z , se calculează astfel:

sau
$$N_{tot} = N_{ob} + N_t + N_a = N - \frac{1}{4} N_a - \frac{1}{2} N_t + N_t + N_a, \quad (3.34)$$

$$N_{tot} = N + \frac{3}{4} N_a + \frac{1}{2} N_t,$$

și ținând seama de relațiile (3.29), (3.30), (3.32), obținem:

$$N_{tot} = \frac{4\pi f_0^3}{3c^3} V + \frac{3}{4} \frac{f_0 L}{2c} + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi f_0^2 A}{2c^2} - \frac{f_0 L}{2c} \right)$$

sau
$$N_{tot} = \frac{4\pi f_0^3}{3c^3} V + \frac{\pi f_0^2 A}{4c^2} + \frac{f_0 L}{8c}. \quad (3.35)$$

În concluzie, frecvențele proprii indică existența undelor sonore, care după reflexii succesive interferează, producând unde staționare cu concentratori de energie în zona ventrelor și cu reducerea energiei în zona nodurilor.

Pe baza existenței frecvențelor proprii și a modurilor proprii de vibrație axiale, tangențiale și oblice se poate face o clasificare a undelor sonore după modurile proprii definite anterior. Astfel, undele sonore în interiorul incintelor pot fi caracterizate după cum urmează:

a) *unde sonore axiale* pentru care două valori ale numerelor n_x , n_y , n_z , sunt nule. Astfel, unda sonoră se propagă după direcția axei de același nume cu numărul diferit de zero. Numărul total al undelor din această categorie pentru o încăpere este notat cu N_a ;

b) *unde sonore tangențiale* pentru care o singură valoare din cele trei numere n_x , n_y , n_z , este nulă, celelalte două fiind diferite de zero. Aceste unde se propagă paralel cu pereții camerei, fără să fie paralele cu muchiile încăperii. Numărul total al undelor din această categorie, pentru o cameră închisă este N_t ;

c) *unde sonore oblice* pentru care nici o valoare a numerelor n_x , n_y , n_z , nu se anulează. Aceste unde sonore au direcții de propagare oarecare, iar în drumul lor întâlnesc toți pereții încăperii. Numărul total al undelor din această categorie care interferează este N_{ob} .

Pentru situația în care trebuie să determinăm numărul de frecvențe proprii ale unei încăperi într-un anumit domeniu de frecvențe f_0 și $f_0 + \Delta f$ adică în banda de frecvență Δf , atunci considerăm două sfere concentrice cu razele f_0 și $f_0 + \Delta f$ în volumul cărora vom avea

$$\Delta N_a = \frac{L}{2c} \Delta f; \quad (3.36)$$

$$\Delta N_t = \left(\frac{\pi f_0 A}{c^2} - \frac{L}{2c} \right) \Delta f; \quad (3.37)$$

$$\Delta N_{ob} = \left(\frac{4\pi f_0^2}{c^3} V - \frac{\pi f_0 A}{2c^2} + \frac{L}{8c} \right) \Delta f; \quad (3.38)$$

$$\Delta N_{tot} = \left(\frac{4\pi f_0^2}{c^3} V + \frac{\pi f_0 A}{2c^2} + \frac{L}{8c} \right) \Delta f. \quad (3.39)$$

Exemplul 1. Se consideră camera închisă care are datele din tabelul 3. 1, unde camera are $l_x = 6$ m, $l_y = 4$ m, $l_z = 3$ m, $V = 72$ m³, $A = 2(6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 4 \cdot 3) = 108$ m². $L = 4(6 + 4 + 3) = 52$ m, în banda de frecvență de $\Delta f = 10$ Hz, obținem:

a) pentru raza sferei $f_0 = 100$ Hz, avem:

$$\Delta N_{ob} = \left(\frac{4\pi 100^2 \cdot 72}{340^3} - \frac{\pi 100 \cdot 108}{2 \cdot 340^2} + \frac{52}{8 \cdot 340} \right) \cdot 10 = 1 \text{ moduri}$$

b) pentru raza sferei $f_0 = 1000$ Hz, avem:

$$\Delta N_{ob} = \left(\frac{4\pi 1000^2 \cdot 72}{340^3} - \frac{\pi 1000 \cdot 108}{2 \cdot 340^2} + \frac{52}{8 \cdot 340} \right) \cdot 10 = 215 \text{ moduri}$$

Exemplul 2. Se consideră o încăpere de 100 m^3 , cu laturile $l_x=6,6$ m, $l_y=4,5$ m, $l_z=3,3$, care are următoarele moduri proprii, astfel:

a) pentru frecvențele proprii mai mici decât $f_0 = 200$ Hz, avem:

$$\begin{aligned} N_{tot} &= 144; \\ N_a &= 16, \text{ respectiv } 10\%; \\ N_l &= 64, \text{ respectiv } 45\%; \\ N_{ob} &= 64, \text{ respectiv } 45\%. \end{aligned}$$

b) pentru frecvențele proprii în domeniul $f_0 = 1000 \div 1200$ Hz, avem:

$$\begin{aligned} N_{tot} &= 7320; \\ N_a &= 16, \text{ respectiv } 0,2\%; \\ N_l &= 750, \text{ respectiv } 10\%; \\ N_{ob} &= 6550, \text{ respectiv } 90\%. \end{aligned}$$

Exemplul 3. Considerăm o incintă cu volumul de 1000 m^3 și laturile $l_x=15$ m, $l_y=10$ m, $l_z=6,6$ m, care are următoarele frecvențe proprii, astfel:

a) pentru frecvențe mai mici decât de 200 Hz, avem:

$$\begin{aligned} N_{tot} &= 1200; \\ N_a &= 40, \text{ respectiv } 3\%; \\ N_l &= 360, \text{ respectiv } 30\%; \\ N_{ob} &= 800, \text{ respectiv } 67\%. \end{aligned}$$

b) pentru frecvențele cuprinse în domeniul $1000 : 1200$ Hz, avem:

$$\begin{aligned} N_{tot} &= 71200; \\ N_a &= 40, \text{ respectiv } 0,05\%; \\ N_l &= 3560, \text{ respectiv } 3,95\%; \\ N_{ob} &= 67600, \text{ respectiv } 96\%. \end{aligned}$$

Se constată că la incintele cu volum mare, procentul frecvențelor proprii rezultate pentru undele oblice este mult mai mare decât în cazul încăperilor de

volum mic. De asemenea, acest procent este mult mai mare în domeniul frecvențelor înalte decât în cazul frecvențelor joase. Deoarece undele care au direcția de propagare normală la pereții unei camere sunt atenuate într-o proporție mică, în special cele de frecvență joasă, ceea ce demonstrează că incintele de volum mic sunt caracterizate de câmp sonor neuniform în comparație cu incintele de volum mare. Din aceste motive, în incintele de volum mic, măsurările acustice au precizie scăzută.

Notă. Pentru a asigura o bună audibilitate în incintă, adică asigurarea unei difuzii corespunzătoare a sunetului în interior, este necesar ca numărul undelor oblice să aibă frecvențe proprii cu valori maxime în fiecare bandă de frecvență.

3.1.2. Propagarea undelor acustice amortizate în spații închise

Folosind notațiile $k_x = \frac{n_x \pi}{l_x}$, $k_y = \frac{n_y \pi}{l_y}$, $k_z = \frac{n_z \pi}{l_z}$, ecuația (3.38) poate fi scrisă astfel

$$\tilde{p} = p_{\max} \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{i\omega t}. \quad (3.40)$$

Notăm $p_{\max} = P$ și rezultă :

$$\tilde{p} = P \cos(k_x x) \cos(k_y y) \cos(k_z z) e^{i\omega t}. \quad (3.41)$$

Din relația (3.22), avem :

$$\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = \left(\frac{\pi n_x}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_y}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{\pi n_z}{l_z}\right)^2, \quad (3.42)$$

în care introducem numerele de undă k , k_x , k_y , k_z , astfel

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2. \quad (3.43)$$

Ținând seama de faptul că pereții nu reflectă perfect unda incidentă și că o parte din energia acesteia este diminuată în procesul de absorbție, cunoscut în mod global prin noțiunea de amortizare, atunci trebuie să introducem coeficientul de amortizare α . Acesta se poate introduce în mod similar cu numărul de undă (3.43),

de forma $\tilde{k}_j = (\alpha_j - i\omega_j) \frac{1}{c}$ unde $j = x, y, z$, astfel încât expresia presiunii din

unda acustică amortizată poate fi scrisă sub forma:

$$p = Pch\left[(\alpha_x - i\omega_x)\frac{x}{c} + \psi_x\right]ch\left[(\alpha_y - i\omega_y)\frac{x}{c} + \psi_y\right]ch\left[(\alpha_z - i\omega_z)\frac{x}{c} + \psi_z\right]e^{(i\omega - \alpha)t} \quad (3.44)$$

Condiția de existență a procesului ondulatoriu este

$$(\alpha - i\omega)^2 = (\alpha_x - i\omega_x)^2 + (\alpha_y - i\omega_y)^2 + (\alpha_z - i\omega_z)^2$$

prin dezvoltare obținem:

$$\alpha^2 - 2i\alpha\omega - \omega^2 = \alpha_x^2 - 2i\alpha_x\omega_x - \omega_x^2 + \alpha_y^2 - 2i\alpha_y\omega_y - \omega_y^2 + \alpha_z^2 - 2i\alpha_z\omega_z - \omega_z^2$$

de unde :

$$\begin{cases} \alpha^2 - \omega^2 = (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) - (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2), \\ -2i\alpha\omega = -2i(\alpha_x\omega_x + \alpha_y\omega_y + \alpha_z\omega_z); \end{cases} \quad (3.45)$$

sau

$$\begin{cases} \omega^2 - \alpha^2 = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) - (\alpha_x^2 + \alpha_y^2 + \alpha_z^2) \\ \alpha = \frac{\omega_x}{\omega}\alpha_x + \frac{\omega_y}{\omega}\alpha_y + \frac{\omega_z}{\omega}\alpha_z. \end{cases} \quad (3.46)$$

Cazul particular $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_z = 0$ duce la obținerea relațiilor de la unda sonoră fără amortizare. Considerăm cazul undelor axiale neamortizate, adică vom trata cazul unidimensional pentru care avem:

$$\alpha_x = \alpha_z; \quad \alpha_y = \alpha_z = 0; \quad \omega_x = \omega;$$

$$\omega_y = \omega_z = 0; \quad \psi_y = \psi_z = 0,$$

ceea ce duce la ecuația

$$p = p_x = Pch\left[(\alpha - i\omega)\frac{x}{c} + \psi_x\right]e^{(i\omega - \alpha)t}. \quad (3.47)$$

Viteza unei particule de aer va fi:

$$v_x = -\frac{1}{\rho_0} \int \frac{\partial p}{\partial x} dt = \frac{P}{\rho_0 c} sh\left[(\alpha - i\omega)\frac{x}{c} + \psi_x\right]e^{(i\omega - \alpha)t}. \quad (3.48)$$

Impedanța acustică are forma:

$$Z_s = \frac{p_x}{v_x} = \rho_0 c cth\left[(\alpha - i\omega)\frac{x}{c} + \psi_x\right]. \quad (3.49)$$

Notăm cu Z_n impedanța peretelui la incidența normală, a cărei expresie poate fi scrisă astfel:

$$Z_n = \rho_0 c (r_n + ix_n), \quad (3.50)$$

unde: r_n este rezistența;

x_n - reactanța relativă la impedanța specifică a aerului.

Astfel, pentru $x=0$, din (3.49) și (3.50), avem :

$$cth(\psi_x) = -\rho_0 c (r_n + ix_n) \quad (3.51)$$

unde semnul minus semnifică faptul că viteza particulei este de sens invers axei Ox , iar Ψ_x este o mărime complexă.

În general, pentru majoritatea materialelor utilizate pentru pereți sunt valabile relațiile $r_n \gg x_n$ și $r_n \gg 1$, astfel încât relația (3,51) devine:

$$\operatorname{th}(\psi_x) = -\frac{1}{r_n + ix_n} \cong -\frac{1}{r_n}, \quad (3.52)$$

de unde:

$$\psi_x \cong -\frac{1}{r_n}. \quad (3.53)$$

Pe peretele opus la $x=1$ viteza are sensul axei Ox deci este pozitivă, ceea ce duce la expresia: $Z_n \cong \rho_0 c r_n = \rho_0 c \operatorname{cth}\left[(\alpha - i\omega)\frac{l_x}{c} - \frac{1}{r_n}\right]$ (3.54)

de unde:

$$r_n \cong \frac{1 - i \operatorname{th}\left(\frac{\alpha l_x}{c} - \frac{1}{r_n}\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\omega l_x}{c}\right)}{i \operatorname{th}\left(\frac{\alpha l_x}{c} - \frac{1}{r_n}\right) - i \operatorname{tg}\left(\frac{\omega l_x}{c}\right)}. \quad (3.55)$$

Pentru ca partea dreaptă a egalității (3.55) să fie reală ca și partea stângă

trebuie să avem $\operatorname{tg}\frac{\omega l_x}{c} = 0$ de unde $\omega = n \frac{\pi c}{l_x}$, sau

$$f = n \frac{c}{2l_x}. \quad (3.56)$$

Obținându-se aceeași condiție ca și la undele neamortizate. În acest caz, folosind condiția (3.56) expresia lui r_n din (3.55) devine

Cu (3.56) relația (3.55) devine $\frac{1}{r_n} \cong \operatorname{th}\left(\frac{\alpha l_x}{c} - \frac{1}{r_n}\right)$ (3.57)

deoarece $\frac{1}{r_n} \ll 1$ relația (3.57) poate fi scrisă sub forma

$$\frac{1}{r_n} \cong \frac{\alpha l_x}{c} - \frac{1}{r_n}, \quad (3.58)$$

de unde obținem coeficientul de amortizare al peretelui, astfel

$$\alpha \cong \frac{2c}{r_n l_x}. \quad (3.59)$$

Tinând seama de densitatea medie de energie acustică a unei neamortizate, $\bar{E}_0 = \frac{P^2}{2\rho_0 c^2}$, pentru unda amortizată se poate introduce noțiunea de densitate medie de enrgic acustică E dependentă de durata t după încetarea emisie sonore. Astfel, avem

$$\bar{E} = \bar{E}_0 e^{-2\alpha t} = \bar{E}_0 e^{-\left(\frac{4c}{r_n l_x} t\right)}, \quad (3.60)$$

unde E_0 este energia sursei acustice la $t = 0$, când emisia încetează.

Rata de diminuare a energiei acustice se poate calcula în dB/s, astfel:

$$D = \left| 10 \lg e^{-\frac{4c}{r_n l_x}} \right| = 17,3 \frac{c}{r_n l_x}, \text{ dB/s.} \quad (3.61)$$

Durata de reverberație, prin definiție, este timpul T necesar pentru reducerea intensității acustice într-o încăpere de la 60 dB peste limita de audibilitate până la limita de audibilitate, atunci când sursa de zgomot a încetat să

mai emită. Astfel, avem $T = \frac{60}{D} = \frac{60}{17,3c} r_n l_x$,
sau

$$T = 3,45 \frac{r_n l_x}{c} \quad (3.62)$$

Pe baza experimentărilor efectuate s-a putut stabili că amortizarea undelor înclinate față de pereți (tangențiale și oblice) este mai mare ca a undelor normale la suprafața pereților. Astfel, raportul coeficienților de amortizare corespunzător celor trei tipuri de unde este $\alpha_a : \alpha_t : \alpha_{ob} = 4 : 5 : 6$.

3.2. Elemente de acustică geometrică a incintei

Considerăm că în interiorul unui spațiu închis, se află o sursă și că la un anumit moment de timp t_0 sursa începe să emită. În acest caz, densitatea de energie va crește în mod continuu, putând atinge valori foarte mari dacă pereții încăperii (sau alte ale acesteia) ar fi perfect reflectanți, adică întreaga energie emisă de sursă într-un anumit interval de timp ar rămâne în cameră. Ca urmare a pierderilor ce se produc la fiecare reflexie, după un număr oarecare de reflexii, energia purtată de unde se diminuează, atingându-se un echilibru între emisia de sursă și suma energiilor pierdute de fiecare undă la fiecare reflexie. În acest interval de timp, densitatea de energie devine staționară.

Introducem ipoteza că în orice moment, repartiția de energie este omogenă în încăpere, iar absorbția acustică se face în mod continuu.

Pe această bază, putem stabili relația de conservare a energiei sub forma "creșterea energiei în incintă este egală cu energia emisă de sursă minus energia absorbită de pereți".

3.2.1. Densitatea de energie acustică într-o incintă

Considerăm că în incintă există un câmp acustic perfect difuz, care se repartizează într-un interval de timp scurt după începerea emisiei acustice. Rezultă că la un moment dat, densitatea de energie acustică E este aceeași în toate punctele, iar fluxul de energie sonoră este același în toate direcțiile. Atunci când s-a realizat câmpul acustic difuz, densitatea medie de energie acustică \bar{E} este constantă în tot volumul incintei.

În figura 3.4 este reprezentată relația transferului de energie acustică dintre sursa acustică elementară A de volum dV care radiază în toate direcțiile energia $\bar{E}dV$ și punctul receptor M de suprafață dS care are normala \bar{n} dirijată după axa Oz a sistemului de axe $Oxyz$

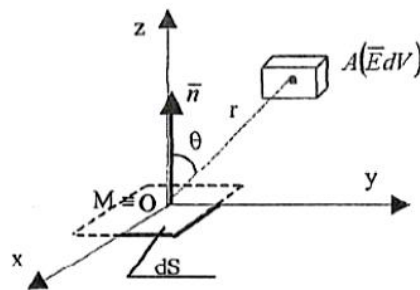


Fig. 3.4

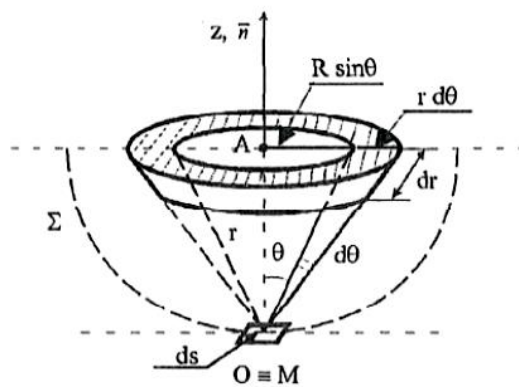


Fig. 3.5

La distanța AM, energia $\bar{E}dV$ a sursei acustice A este repartizată după o sferă Σ cu centrul în A, de rază r și care conține punctul receptor M de suprafață dS . În acest caz, energia care se găsește pe unitatea de suprafață a sferei va fi:

$$dE_A = \frac{\bar{E}dV}{4\pi r^2},$$

iar energia care atinge suprafața dS din M este

$$dE = dE_M = \frac{\bar{E}dV}{4\pi r^2} dA \cos \theta. \quad (3.63)$$

Din figura 3.5. avem $dV=(2\pi r \sin\theta)(rd\theta)dr$, caz în care (3.63) devine

$$dE = \bar{E} \frac{2\pi r^2 \sin \theta d\theta dr dA}{4\pi r^2} \cos \theta,$$

sau $dE = \frac{\bar{E}}{2} \sin \theta d\theta dr dA \cos \theta$, de unde :

$$\begin{aligned} dE &= \frac{\bar{E}}{2} dA dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{\bar{E}}{2} dA dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2\theta d\theta = \frac{\bar{E}}{2} dA dr \left[-\frac{1}{4} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \frac{\bar{E}}{2} dA dr \cdot \frac{1}{2} \end{aligned}$$

sau $dE = \frac{\bar{E}}{4} dA dr$. (3.64)

Viteza sunetului pe direcția razei r este $c = \frac{dr}{dt}$ caz în care (3.64) devine

$$dE = \frac{\bar{E}}{4} cdA dt, \quad (3.65)$$

sau $\frac{dE}{dt} = \frac{\bar{E}}{4} cdA$. (3.66)

Introducem intensitatea acustică I la suprafața peretelui ca fiind energia acustică pe unitatea de suprafață în unitatea de timp sau ca puterea acustică pe unitatea de suprafață. Astfel, avem

$$I = \frac{dE}{dt} \frac{1}{dA} = \frac{dP}{dA} = \frac{\bar{E}c}{4}, \quad (3.67)$$

unde cu P s-a notat puterea sursei.

Se observă că în *câmp difuz*, intensitatea este de patru ori mai mică decât în *câmp acustic* direct (undă plană normală la suprafață).

$$\text{Din (3.67) avem } \frac{dE}{dt} = IdA, \text{ sau } \frac{\Delta E}{\Delta t} = IdA, \quad (3.68)$$

care este rata de absorbție a energiei în timp.

În situația în care suprafețele interioare ale configurației geometrice a incintei au coeficienți de absorbție diferiți, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ corespunzătorii

suprafețelor S_1, S_2, \dots, S_n atunci rata de absorbție a energiei în timp $\frac{\Delta E}{\Delta t}$ pe

$$\text{totalitatea suprafeței interioare a incintei este } \frac{\Delta E}{\Delta t} = I(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_n S_n) \quad \text{sau}$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\bar{E}c}{4} (\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \dots + \alpha_n S_n) \quad \text{în care notăm } a = \sum_{j=1}^n \alpha_j S_j \quad \text{și avem}$$

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{4} \bar{E}ca. \quad (3.69)$$

Relația de conservare a energiei invocată anterior poate fi scrisă astfel

$$V \frac{d\bar{E}}{dt} = P - \frac{1}{4} \bar{E}ca \quad (3.70)$$

în care: V este volumul interior total al incintei ;

P – puterea constantă a sursei.

Integrăm relația (3.70) și în mod succesiv obținem $\frac{Vd\bar{E}}{P - \frac{1}{4} \bar{E}ca} = dt$ sau

$$\frac{\frac{1}{4} ca d\bar{E}}{P - \frac{1}{4} \bar{E}ca} = \frac{ca}{4V} dt,$$

de unde prin integrare membru cu membru avem

$$\ln\left(P - \frac{1}{4} ca\bar{E}\right) = -\frac{ca}{4V} t + C,$$

sau

$$\ln P \left(1 - \frac{ca\bar{E}}{4P}\right) = -\frac{ca}{4V} t + C,$$

de unde obținem

$$\ln P + \ln\left(1 - \frac{ca\bar{E}}{4P}\right) = -\frac{ca}{4V} t + C. \quad (3.71)$$

Condiția la limită este corespunzătoare momentului $t=0$, când sursa acustică începe să emită, adică $\ln P=C$, ceea ce face ca (3.71) să devină

$$\ln\left(1 - \frac{ca\bar{E}}{4P}\right) = -\frac{ca}{4V}t,$$

sau

$$1 - \frac{ca\bar{E}}{4P} = e^{-\frac{ca}{4V}t},$$

de unde avem

$$\bar{E} = \frac{4P}{ca} \left(1 - e^{-\frac{ca}{4V}t}\right). \quad (3.72)$$

Din relația (3.72) se constată că energia \bar{E} crește exponențial cu timpul t , astfel încât la valori mari ale lui t , termenul exponențial $e^{-\frac{ca}{4V}t}$ tinde către zero, devenind neglijabil comparativ cu unitatea.

După acest interval de timp Δt , densitatea de energie \bar{E} devine constantă (perioadă staționară), fiind dată de relația:

$$\bar{E}_\infty = \bar{E}_s = \frac{4P}{ca}. \quad (3.73)$$

Din relațiile (3.67) și (3.73) avem

$$I_s = \frac{\bar{E}_s c}{4} = c \frac{P}{ca}$$

sau

$$I_s = \frac{P}{a}, \quad (3.74)$$

unde I_s și E_s sunt mărimi acustice în regim staționar.

Din (3.67) rezultă că $I = \frac{\bar{E}c}{4}$ care împreună cu (3.72) duce la relația

$$I = \frac{4P}{ca} \frac{c}{4} \left(1 - e^{-\frac{ca}{4V}t}\right),$$

sau

$$I = \frac{P}{a} \left(1 - e^{-\frac{ca}{4V}t}\right). \quad (3.75)$$

Se constată că atingerea regimului staționar, adică a condițiilor de câmp acustic difuz se realizează într-un timp mai mare cu cât absorbția pereților este mai mică, simultan cu valori mari pentru \bar{E} și I . Câmpul difuz se obține după reflexii repetate pe pereții incintei, în durata de cca 0,5 s pentru camere mici și 1,0 ... 1,5 s pentru incinte mari. În cazul în care camerele au coeficienții de absorbție mari, atunci \bar{E} și I ating valori limită înaintea realizării câmpului acustic difuz.

În figura 3.6 se prezintă curba de variație în timp a intensității sonore unde originea timpului coincide cu momentul $t = 0$, când sursa acustică începe să emită.

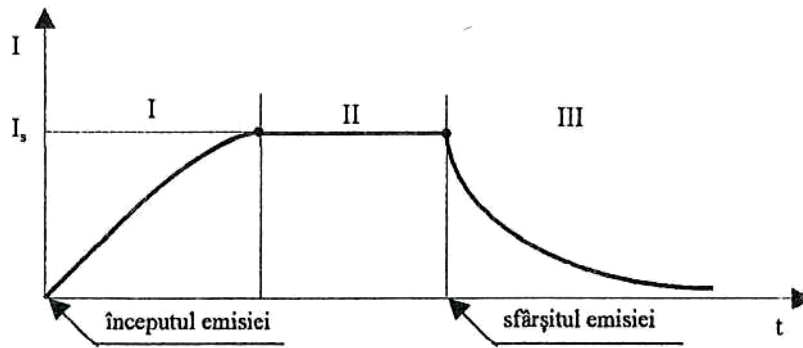


Fig. 3.6

Se observă că în prima perioadă I, intensitatea acustică crește exponențial odată cu creșterea timpului, ajungând la valoarea de palier I_s , când numărul de reflexii este suficient de mare, încât energia absorbită de pereți în unitatea de timp este egală cu energia emisă de sursă, adică puterea absorbită este egală cu puterea emisă.

În a doua perioadă II, regimul acustic este staționar, curba prezintă un palier

la valoarea constantă a intensității acustice staționare $I_s = \frac{P}{a}$. În regimul

staționar se observă că valoarea intensității este cu atât mai mare, cu cât absorbția pereților încăperii este mai mică și independentă de dimensiunile incintei.

În realitate, datorită interferențelor în anumite puncte geometrice ale incintei, se concentrează energie acustică, ceea ce duce la valori diferite ale intensității acustice. Astfel, la încăperile cu dimensiuni mari, fie datorită pierderilor de energie în aer, fie datorită coeficienților mari de absorbție acustică a pereților, intensitatea acustică va fi mai mare în jurul sursei decât în restul punctelor incintei.

În a treia perioadă III, sursa încetează emisiunea sonoră, adică $P = 0$, ceea ce duce la descreșterea intensității.

Considerăm momentul încetării emisiei acustice în noua origine a timpului, când pentru $t=0$, puterea sursei este $P = 0$. Astfel, din (3.70) avem

(3.76)

care prin integrare duce la

$$V \frac{d\bar{E}}{dt} = -\frac{\bar{E}ca}{4},$$

sau

$$\frac{d\bar{E}}{\bar{E}} = -\frac{ca}{4V} dt,$$

de unde

$$\int \frac{d\bar{E}}{\bar{E}} = -\frac{ca}{4V} \int dt,$$

$$\ln \bar{E} = -\frac{ca}{4V} t + \ln C,$$

iar pentru $t=0$, $\bar{E} = \bar{E}_s$ avem: $\ln E_s = \ln C$, $C = E_s = \frac{4P}{ca}$, deci

$$\ln \bar{E} - \ln \frac{4P}{ca} = -\frac{ca}{4V}t,$$

sc obținem

$$\bar{E} = \frac{4P}{ca} e^{-\frac{ca}{4V}t},$$

iar

$$I = \frac{\bar{E}c}{4} = \frac{P}{a} e^{-\frac{ca}{4V}t} = I_s e^{-\frac{ca}{4V}t}.$$

Procesul de menținere ca câmpului acustic într-o încăpere după încetarea emisiunii sursei acustice se numește reverberație.

În cazul analizat, reverberația corespunde perioadei a treia de evoluție a mărimilor acustice \bar{E} și I care se notează cu \bar{E}_R și I_R , fiind explicitate de expresii obținute anterior, astfel

$$\bar{E}_R = \frac{4P}{ca} e^{-\frac{ca}{4V}t}, \quad (3.77)$$

$$I_R = I_s e^{-\frac{ca}{4V}t}. \quad (3.78)$$

Mărimile \bar{E}_R și I_R , descresc exponențial cu timpul în procesul de reverberație.

3.2.2. Durata de reverberație

Din relația (3.78) se observă că intensitatea sunetului tinde către zero după un interval de timp foarte mare, teoretic pentru $t \rightarrow \infty$. În mod fizic, urechea umană percepe sunetul până la o anumită valoare a intensității sonore, după care sub această valoare sunetul nu mai este sesizat de un ascultător otologic normal. Deoarece modul de descreștere a intensității sunetului într-o încăpere constituie o caracteristică a acesteia, se folosește noțiunea de durată sau *timp de reverberație* T , peste care, adică pentru $t > T$ senzația auditivă a urechii umane a atins pragul limită de jos și sunetul nu mai este perceput.

Prin definiție, *durata de reverberație* T este timpul necesar ca intensitatea sunetului să scadă la a milioana parte din valoarea pe care a avut-o în regim

staționar, adică $I_R = \frac{1}{10^6} I_s$ sau $I_R = 10^{-6} I_s$.

Formula lui Sabine

În acest caz, pe baza definiției, pentru $t = T$, iar $\frac{I_R}{I_s} = 10^{-6}$, relația (3.78) poate fi

scrisă astfel: $\frac{I_R}{I_s} = e^{-\frac{ca}{4V}T}$, unde prin logaritmare în ambii membrii avem:

$$-\frac{ca}{4V} T \ln e = -6 \ln 10,$$

$$T = \frac{24V \ln 10}{ca} = \frac{53,3V}{ca},$$

din care obținem

în care introducem $c = 340$ m/s, pentru aer și avem

$$T = 0,161 \frac{V}{a} = \frac{V}{\sum_{j=1}^n \alpha_j S_j}. \quad (3.79)$$

Relația (3.79) este denumită formula lui Sabine, iar suprafața echivalentă

de absorbție $a = \sum_{j=1}^n \alpha_j S_j$, are ca unitate de măsură *l sabine*.

Menționăm că formula lui W.Sabine a fost stabilită în ipoteza existenței unui câmp acustic difuz (repartiție uniformă a energiei în incintă) și o absorbție continuă și suficient de lentă a energiei pentru uniformizarea distribuției acesteia în interior.

Pe cale experimentală, Sabine a stabilit dependența timpului de reverberație în raport cu volumul V și suprafața echivalentă de absorbție a specifice încăperii, astfel încât

$$T = k \frac{V}{a} \quad (3.80)$$

Din determinări experimentale s-a stabilit că pentru *încăperi nu prea mari*, unde coeficientul de absorbție mediu $\bar{\alpha} \leq 0,3$, folosirea formulei lui Sabine duce la rezultate satisfăcătoare.

În cazul *încăperilor mari* și în situația în care absorbția acustică este mare, formula lui Sabine duce la rezultate aproximative cu erori mari.

Formula lui Eyring

J. Eyring a analizat problema timpului de reverberație, folosind ipoteza că absorbția sunetului se produce în mod discontinuu de câte ori o undă sonoră atinge o suprafață a incintei unde se reflectă. Se consideră că distribuția în incintă este uniformă, iar undele se propagă în mod aleator, în orice direcție. Notăm cu t_m timpul mediu între două reflexii succesive, precum și un drum mediu l_m străbătut de frontul de undă în cele două reflexii. De asemenea, se consideră că energia acustică totală din incintă este $\bar{E}V$, iar un front de undă întâlnește pereții de $\frac{c}{l_m}$

ori pe secundă. Rezultă că energia totală care atinge într-o secundă o suprafață a incintei este dată de

$$\bar{E}V \frac{c}{l_m}.$$

Dar $I = \frac{\bar{E}_c}{4}$, iar pentru suprafața S a incintei, energia va fi

$W = IS = \frac{\bar{E}_c}{4} S$, astfel încât vom avea $\bar{E}V \frac{c}{l_m} = \frac{\bar{E}_c}{4} S$ de unde

$$l_m = \frac{4V}{S}, \quad (3.81)$$

Ținem seama de faptul că intensitatea acustică din încăperea în regim staționar este I_0 și că $\bar{\alpha}$ este coeficientul mediu de absorbție al suprafețelor incintei

$\left(\bar{\alpha} = \frac{1}{S} \sum \alpha_j S_j \right)$, ceea ce permite ca variația în timp a intensității sonore să poată fi urmărită după schema următoare:

- la timpul $t = 0$ $I = I_0$;
- la timpul $t = t_m$ $I_1 = I_0(1 - \bar{\alpha})$ după o reflexie;
- la timpul $t = 2 t_m$ $I_2 = I_0(1 - \bar{\alpha})^2$ după două reflexii;
- la timpul $t = n t_m$ $I_n = I_0(1 - \bar{\alpha})^n$ după n reflexii;

Punând $n = \frac{t}{t_m}$, avem

$$I_n = I_0(1 - \bar{\alpha})^{\frac{t}{t_m}}. \quad (3.82)$$

Dacă la $t = T$ durata de reverberație, atunci avem:

de unde

$$\frac{I_n}{I_0} = (1 - \bar{\alpha})^{\frac{T}{t_m}} = 10^{-6},$$

$$\frac{T}{t_m} \ln(1 - \bar{\alpha}) = -6 \ln 10,$$

sau

$$T = \frac{6 t_m \ln 10}{\ln(1 - \bar{\alpha})},$$

în care înlocuim t_m din (3.82) și avem $T = \frac{6 \cdot 4 \cdot V \ln 10}{-c S \ln(1 - \bar{\alpha})}$, unde luăm $c = 340$ m/s și

obținem:

$$T = \frac{0,161 \cdot V}{-S \ln(1 - \bar{\alpha})}. \quad (3.84)$$

Relația (3.84) este cunoscută sub denumirea de *formula lui Eyring*.

Dacă dezvoltăm în serie $\ln(1-\bar{\alpha})$ valori subunitare ale lui $1-\alpha$, avem

$$-\ln(1-\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}^2}{2} + \frac{\bar{\alpha}^3}{3} + \dots$$

caz în care (3.84) devine

$$T = \frac{0,161 \cdot V}{S \left(\bar{\alpha} + \frac{\bar{\alpha}^2}{2} + \frac{\bar{\alpha}^3}{3} + \dots \right)}, \quad (3.85)$$

ceea ce arată că se pot obține valori mai mici ale duratei de reverberație decât în cazul formulei lui Sabine.

Pentru valori mici ale lui $\bar{\alpha}$, adică, dacă $\bar{\alpha} \leq 0,3$, termenii superiori ai dezvoltării în serie pot fi neglijați, rămânând numai $\bar{\alpha}$, care împreună cu S dau $\bar{\alpha}S = a$, adică se ajunge la formula lui Sabine.

Formula lui Millington

În situația în care suprafețele absorbante sunt plasate neuniform, formula lui Eyring dă rezultate eronate, motiv pentru care Millington a reluat raționamentul lui Eyring, dar considerând că suprafețele absorbante cu $S_1\alpha_1, S_2\alpha_2, \dots$ sunt distribuite în mod întâmplător în incintă.

Astfel, intensitatea acustică evoluează după fiecare reflexie, ținând seama de următoarea schemă :

- la prima reflexie pe suprafața S_1 , avem $I_1 = I_0(1-\alpha_1)$;
- la a doua reflexie pe suprafața S_2 , avem $I_2 = I_1(1-\alpha_2) = I_0(1-\alpha_1)(1-\alpha_2)$.

În timpul t numărul total al reflexiilor va fi N , din care n_1 pe suprafața S_1 , n_2 pe suprafața S_2 ..., astfel încât avem :

$$I_n = I_0(1-\alpha_1)^{n_1}(1-\alpha_2)^{n_2}(1-\alpha_3)^{n_3} \dots \quad (3.86)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 + \dots = N. \quad (3.87)$$

Probabilitatea ca unda sonoră să întâlnească o anumită suprafață este cu atât mai mare cu cât suprafața respectivă este mai mare.

Astfel, se poate scrie propoziția, de forma : $\frac{n_1}{N} = \frac{S_1}{S}$, sau $\frac{n_1}{S_1} = \frac{N}{S}$, iar în

general, pentru n cazuri avem :

$$\frac{n_1}{S_1} = \frac{n_2}{S_2} = \frac{n_3}{S_3} = \dots = \frac{N}{S}, \quad (3.88)$$

în care ținem seama că $t = Nt_m = N \frac{4V}{cS}$ și obținem

$$\frac{n_1}{S_1} = \frac{n_2}{S_2} = \frac{n_3}{S_3} = \dots = \frac{c}{4V} t \quad (3.89)$$

În acest caz, relația (3.86) poate fi scrisă sub forma

$$I_n = I_0 (1 - \alpha_1) \frac{cS_1}{4V} t (1 - \alpha_2) \frac{cS_2}{4V} t \dots \quad (3.90)$$

de unde impunem condiția de reverberație, astfel încât $\frac{I_n}{I_0} = 10^{-6}$, la $t=T$, iar din

$$\frac{I_n}{I_0} = (1 - \alpha_1) \frac{cS_1}{4V} T (1 - \alpha_2) \frac{cS_2}{4V} T \dots = 10^{-6}. \quad (3.91)$$

(3.90) avem

Logaritmând (3.91) obținem :

$$\frac{cT}{4V} [S_1 \ln(1 - \alpha_1) + S_2 \ln(1 - \alpha_2) + \dots] = -6 \ln 10, \quad (3.92)$$

în care introducem $c=340\text{m/s}$ și avem

$$T = \frac{(24 \ln 10) V}{-c [\sum S_j \ln(1 - \alpha_j)]} = \frac{0,161 V}{-\sum S_j \ln(1 - \alpha_j)}. \quad (3.93)$$

Relația (3.93) este cunoscută sub denumirea de **formula lui Millington**.

Limita formulei lui Millington o constituie cazul în care $\alpha=1$ (fereastră deschisă) se obține din calcul $T=0$, ceea ce nu este real.

În tabelul 3.3 se dau valorile coeficienților de absorbție, în funcție de frecvența undei acustice.

Astfel, în mod exemplificativ au fost alese materialele uzuale în condițiile a trei frecvențe diferite și anume 125Hz, 500Hz și 2000Hz.

Tabelul 3.3 (după N Enescu, I. Magheți, M. Sarbu)

Materialul	$\alpha(f)$			Materialul	$\alpha(f)$		
	125 Hz	500 Hz	200 Hz		125 Hz	500 Hz	200 Hz
Panel acustic	0,16	0,50	0,80	Pavaj beton	0,01	0,02	0,02
Mortar acustic	0,30	0,50	0,55	Pavaj lemn	0,06	0,06	0,06
Perete cărămidă	0,02	0,03	0,05	Podea cu covor	0,11	0,36	0,27
Draperii ușoare	0,04	0,11	0,30	Sticlă	0,04	0,05	0,05
Draperii grele	0,10	0,50	0,82	Marmură	0,01	0,01	0,02
Păslă	0,13	0,56	0,65	Vată minerală	0,35	0,63	0,83

Formula lui Eyring poate fi completată cu influența pe care o produce aerul prin absorbția energiei undei pe parcursul mediu între două reflexii. Astfel, avem:

$$I_{\beta} = I_0 e^{-\beta l_m}, \quad (3.94)$$

unde : β este coeficient de absorbție

$$l_m = ct - \text{lungimea medie}$$

dar

$$\frac{I_n}{I_{\beta}} = 10^{-6} = (1-\bar{\alpha})_{t_m}^t,$$

sau

$$\frac{I_n}{I_0} = (1-\bar{\alpha})_{t_m}^t e^{-\beta ct}. \quad (3.95)$$

introducem condiția de reverberație la $t=T$ și $\frac{I_n}{I_0} = 10^{-6}$ și avem

$$(1-\bar{\alpha})_{\frac{ca}{4V}T} e^{-\beta cT} = 10^{-6}$$

de unde

$$T = \frac{0,161V}{-\alpha \ln(1-\bar{\alpha}) + 4\beta V}. \quad (3.96)$$

În figura 3.7 se prezintă dependența coeficientului de absorbție β al aerului funcție de frecvența sunetului și de umiditatea relativă a aerului n %. Se constată că odată cu creșterea frecvenței, β crește micșorând timpul de reverberație. De asemenea, aerul umed influențează în sens scăzător durata de reverberație.

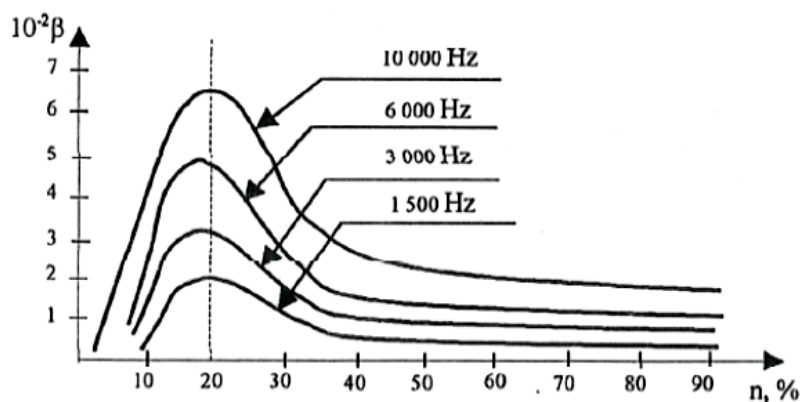


Fig. 3.7

3.2.3. Nivelul sonor al unei incinte

În interiorul unei incinte, câmpul sonor determinat de prezența sursei de emisie, cât și de natura și forma geometrică a suprafețelor incintei, se caracterizează prin următoarele unde:

- unda sonoră directă, care conține totalitatea componentelor armonice emise de sursa acustică;
- unda reverberantă, care conține undele care au fost cel puțin o dată reflectate de pereții interiori.

Pentru nivelul staționar al câmpului sonor, densitatea de energie acustică \bar{E}_s este formată din componenta directă \bar{E}_D și componenta reverberantă \bar{E}_R , astfel

$$\text{încât avem: } \bar{E}_s = \bar{E}_D + \bar{E}_R \quad (3.97)$$

Valoarea densității de energie staționară pentru $t \rightarrow \infty$ este dată de (3.73) sub forma

$$\bar{E}_s = \frac{4P}{ca} = \frac{4P}{c\bar{\alpha}S}, \quad (3.98)$$

Energia directă, până la prima reflexie, este $\bar{E}'_D = \frac{P}{V} t_m = \frac{P}{V} \frac{4V}{cS}$, sau

$$\bar{E}'_D = \frac{4P}{cS}, \quad (3.99)$$

iar energia reverberantă \bar{E}_R va fi $\bar{E}_R = \bar{E}_s - \bar{E}'_D$ sau $\bar{E}_R = \frac{4P}{c\bar{\alpha}S} - \frac{4P}{cS} = \frac{4P}{c\bar{\alpha}S}(1-\bar{\alpha})$,

în care introducem $R = \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} S$, (3.100)

care este constanta de absorbție a camerei, ceea ce duce la expresia

$$\bar{E}_R = \frac{4P}{cR}. \quad (3.101)$$

Dacă sursa radiază uniform în toate direcțiile, atunci:

$$\bar{E}_D = \frac{\bar{p}_D^2}{\rho_0 c^2} = \frac{\bar{I}}{c} = \frac{P}{cS} = \frac{P}{4\pi r^2 c}, \quad (3.102)$$

cu sursa în centrul sferei de rază r , iar \bar{p}_D^2 este valoarea medie pătratică a presiunii din unda directă.

Deoarece sursele nu emit uniform, este necesar să se introducă un parametru Q numit *factor de directivitate*, într-un punct la distanța $r = r_i$, în raport cu sursa, definit astfel:

$$Q = \frac{\bar{p}_\theta^2}{\bar{p}^2}, \quad (3.103)$$

unde \bar{p}_θ este presiunea pe direcția θ de la sursă la punctul considerat;

\bar{p} - presiunea medie (ambele mărimi reprezentând rădăcina medie pătratică).

Factorul Q afectează numai presiunea provenită de la sursă, ceea ce face ca relația (3.102) să poată fi scrisă sub forma

$$\bar{E}_{D0} = \frac{QP}{4\pi r^2 c}, \quad (3.104)$$

Pe această bază, putem scrie relația (3.97) sub forma:

$$\bar{E}_s = \bar{E}_{D0} + \bar{E}_R = \frac{QP}{4\pi r^2 c} + \frac{4P}{cR}, \quad (3.105)$$

iar $\bar{E}_s = \frac{\bar{p}^2}{\rho c^2}$, astfel încât (3.105) poate fi pus sub forma

$$\bar{p}^2 = \rho_0 c P \left(\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{4}{R} \right) \quad (3.106)$$

Valorile lui Q depind de modul de poziționare a sursei acustice în interiorul incintei. Astfel, avem:

$Q = 1$, pentru poziția centrală a sursei omnidirecționale, adică se află la distanță mare față de toți pereții incintei;

$Q = 2$, pentru cazul în care sursa se află pe un perete și radiază întreaga energie într-un semispațiu;

$Q = 4$, pentru cazul în care sursa se află pe o muchie a camerei și radiază toată energia într-un sfert din spațiu;

$Q = 8$, pentru cazul în care sursa se află într-un colț și radiază întreaga energie într-un octant (jumătate din sferă) al spațiului.

Nivelul de presiune sonoră într-un punct al camerei este

$$L_p = 10 \lg \frac{\bar{I}}{I_0} = 10 \lg \frac{\bar{p}^2}{\rho_0 c I_0}.$$

Dar $I_0 = W_0$ pentru o suprafață de 1 m^2 și folosind notația W pentru

puterea acustică în locul lui p din relația (3.106) avem, astfel încât obținem:

$$L_p = 10 \lg \frac{W}{W_0} + 10 \lg \left(\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{4}{R} \right). \quad (3.107)$$

Din relația (3.106), unde $P = W$, avem

$$\bar{p}^2 = \rho_0 c W \left(\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{4}{R} \right), \quad (3.108)$$

unde \bar{p}^2 este presiunea în câmp acustic staționar, care este influențată de câmpul acustic reverberant prin termenul $\frac{4}{R}$. Astfel, din analiza lui (3.108), obținem

cazurile:

a) pentru $4\pi r^2 \ll \frac{R}{4}$, influența absorbției este foarte mică, deoarece $R \gg 16\pi r^2$, așa încât ponderea cea mai mare o are emisia directă a sursei acustice;

b) pentru $4\pi r^2 \gg \frac{R}{4}$, influența absorbției este foarte mare, deoarece $R \ll 16\pi r^2$, ceea ce face ca ponderea cea mai mare să o aibă nivelul presiunii reverberante, care duce la ridicare nivelului zgomotului de fond. În această situație, apare dificultatea că pentru a obține condiții acustice ca vorbirea să fie inteligibilă, este necesară mărirea nivelului emisiei acustice, dar aceasta mărește zgomotul de fond, ducând la o percepție neinteligibilă. Numai prin diminuarea nivelului acustic al vorbirii crește gradul de inteligibilitate.

Exemplu. Considerăm incinta cu $5 \times 2 \times 40 \text{ m}$ și timpul de reverberație $T = 3 \text{ s}$. În interior, se află 100 persoane care vorbesc simultan, fiecare având o emisie acustică de $100 \mu\text{W}$. În acest caz avem:

$$a = \frac{0,161V}{T} = \frac{0,161 \cdot 4000}{3} \cong 215 \text{ sabini}.$$

Valoarea presiunii acustice reverberante rezultă din $\bar{E}_R = \frac{4W}{cR} = \frac{\bar{p}_r^2}{\rho_0 c^2}$, de unde

$$\bar{p}_r^2 = \rho_0 c \frac{4W}{R} \cong \rho_0 c \frac{4W}{a} = 414 \frac{4W}{a} \quad \text{în care s-a aproximat } R = \frac{\bar{\alpha}}{1-\bar{\alpha}} S = a$$

Astfel, avem $\bar{p}_r^2 = 414 \frac{4 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 10^{-6}}{215} = 414 \frac{4 \cdot 10^{-2}}{215} = 7,7 \cdot 10^{-2}$ de unde $p_r \cong 0,28 P_a$

Nivelul presiunii acustice reverberante este $L_p = 20 \lg \frac{0,28}{2 \cdot 10^{-5}} \cong 83 \text{ dB}$

Considerăm că o singură persoană cu $W = 100 \mu W = 10^{-4}$ ar vorbi în sală și ar produce presiunea acustică $p_D = 0,28 P_a$ aceasta înseamnă că s-ar auzi la distanța r ,

astfel $\bar{E}_D = \frac{W}{4\pi r^2 c} = \frac{\bar{p}_D^2}{\rho_0 c^2}$, sau $r^2 = \frac{W \rho_0 c}{4\pi \bar{p}_D^2} \Rightarrow r = \frac{1}{\bar{p}_D} \sqrt{\frac{W \rho_0 c}{4\pi}}$,

de unde $r = \frac{1}{0,28} \sqrt{\frac{10^{-4} \cdot 414}{4\pi}} \cong 0,2 \text{ m}$.

Pentru ca discuția să fie inteligibilă, trebuie coborât nivelul emisie acustice a fiecărei persoane vorbitoare. În caz contrar, fiecare persoană are tendința să vorbească mai tare pentru a se face înțeleasă și în acest fel va crește nivelul acustic al câmpului reverberant, iar gradul de inteligibilitate va scădea și mai mult.

În figura 3.8, se prezintă curbele de propagare a sunetului într-o incintă, în funcție de absorbția suprafețelor limitatoare.

Spațiul cuprins între cele două drepte înclinate corespunde condițiilor de atingere a *câmpului acustic liber*, unde presiunea acustică este dată în mod preponderent de câmpul acustic direct, generat de sursă. În zona din dreapta liniei înclinate întrerupte se realizează recepția indirectă a sunetului, ca mai mare pondere având-o reverberația.

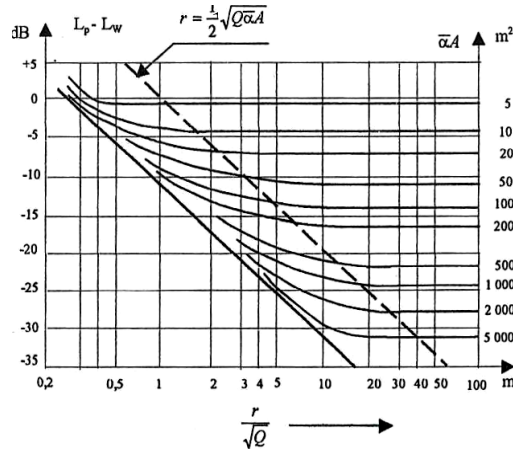


Fig. 3.8

Intensitatea acustică a câmpului staționar este $\bar{I}_s = c\bar{E}_s = \frac{4W}{\bar{\alpha}S}$ care împreună cu

relația $r = \frac{0,161V}{\bar{\alpha}S}$ duce la

$$\bar{I}_s = 24,8 \frac{W}{V} T. \quad (3.109)$$

Aceasta ne arată că în cazul tratării fonoabsorbante a pereților, T scade și I_s scade, constatare valabilă în cazul spațiilor de volume mari.

Dacă incinta are volum mic, cazul unei carcase fonoabsorbante în jurul unei mașini, din cauza volumului mic intensitatea acustică este mare, caz în care trebuie micșorat în mod accentuat T adică este necesară realizarea unei structuri fonoabsorbante cu $\bar{\alpha}S$ mare.

În situația unei săli de spectacol sunetul trebuie să fie condus până în fundul sălii prin reflexii succesive cu ajutorul pereților laterali și ai plafonului. Pentru aceasta configurația lor pe porțiuni trebuie să aibă suprafețe neparalele pentru a forma unde staționare. În același timp trebuie avut în vedere că eliminarea eoului se face prin tratarea suprafețelor cu materiale fonoabsorbante. Suprafețele convexe din jurul scenei trebuie să fie bune reflectante a sunetelor către centrul sălii.

3.3 Acustica pereților despărțitori

Sub aspect acustic un perete simplu este un element de construcție alcătuit din diverse părți legate solidar între ele astfel încât la acțiunea undelor sonore să poată fi caracterizat ca o structură unitară.

3.3.1 Propagarea undelor acustice în raport cu un perete despărțitor simplu modelat ca mediu elastic neinertial

Propagarea sunetului printr-un perete simplu are la bază modelul propagării prin trei medii succesive cu caracteristicile $\rho_1 c_1, \rho_2 c_2, \rho_3 c_3$, așa încât mediul $\rho_2 c_2$ poate forma structura acustică pentru peretele despărțitor (fig. 3.9).

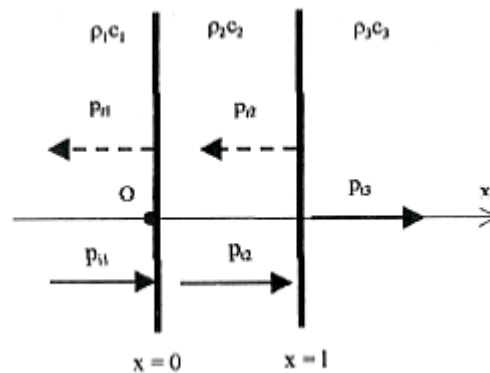


Fig. 3.9

Pe primul plan de separație are loc incidența unei directe cu presiunea p_{i1} și reflexia cu presiunea p_{r1} precum și transmisia unei cu presiunea p_{t1} .

Unda transmisă în mediul $\rho_2 c_2$ are incidență pe suprafața de separație pentru $x=1$ unde o parte se reflectă în p_{r2} și altă parte se transmite în mediul $\rho_3 c_3$ cu presiunea p_{t2} .

Presiunile corespunzătoare sunt exprimate astfel

$$\begin{aligned} p_{i1} &= P_{i1} e^{i(\omega t - k_1 x)} & p_{r1} &= P_{r1} e^{i(\omega t + k_1 x)} \\ p_{i2} &= P_{i2} e^{i(\omega t - k_2 x)} & p_{r2} &= P_{r2} e^{i[\omega t + k_2 (x-1)]} \\ p_{t3} &= P_{t3} e^{i[\omega t - k_3 (x-1)]} \end{aligned}$$

Viteza particulei aerului funcție de presiune este de forma:

$$v_j = \frac{P_k}{\rho_j c_j} e^{i(\omega t - k_j x)}, \text{ unde } j = 1, 2, 3, \dots$$

Condițiile pentru presiuni pentru cele două suprafețe de separație $x = 0$ și $x = 1$ sunt:

-pentru $x = 0$; $p_1 = p_2$, cu condițiile

$$p_1 = p_{i1} + p_{r1};$$

$$p_2 = p_{i2} + p_{r2};$$

-pentru $x = 1$; $p_2 = p_3$, cu condițiile

$$p_2 = p_{i2} + p_{r2};$$

$$p_3 = p_{i3}.$$

Condițiile pentru viteze trebuie să țină seama de faptul că orice particulă ce se află pe o suprafață de separație trebuie să aibă o expresie unică a vitezei în mișcarea de oscilație. Astfel, avem

-pentru $x = 0$; $v_1 = v_2$, cu relațiile

$$v_1 = v_{i1} + v_{r1};$$

$$v_2 = v_{i2} + v_{r2};$$

-pentru $x = 1$; $v_2 = v_3$, cu condițiile

$$v_2 = v_{i2} + v_{r2}$$

Altfel, pentru presiuni avem

$$p_{i1} + p_{r1} = p_{i2} + p_{r2} e^{-ik_2 l}; \quad (3.110)$$

$$p_{i2} e^{-ik_2 l} + p_{r2} = p_{i3}. \quad (3.111)$$

iar pentru viteze avem

$$\frac{1}{\rho_1 c_1} (p_{i1} - p_{r1}) = \frac{1}{\rho_2 c_2} (p_{i2} - p_{r2} e^{-ik_2 l}); \quad (3.112)$$

$$\frac{1}{\rho_2 c_2} (p_{i2} e^{-ik_2 l} - p_{r2}) = \frac{1}{\rho_3 c_3} p_{i3}. \quad (3.113)$$

Din aceste relații ne interesează legătura dintre P_{i1} și P_{i3} .

Notăm impedanțele relative ale celor trei medii cu $z_{12} = \frac{\rho_2 c_2}{\rho_1 c_1}$;

$$z_{23} = \frac{\rho_3 c_3}{\rho_2 c_2}; \quad z_{13} = \frac{\rho_3 c_3}{\rho_1 c_1},$$

cu $z_{12} - z_{23} = z_{13} \quad (3.114)$

Astfel, avem

$$P_{i1} = \frac{P_{i3}}{z_{13}} \left[(z_{12} + 1)(z_{23} + 1)e^{ik_2 l} + (z_{12} - 1)(z_{23} - 1)e^{-ik_2 l} \right]. \quad (3.115)$$

Folosim formula lui Euler pentru forma trigonometrică a numerelor complexe sub forma:

$$\begin{aligned} e^{ik_2l} &= \cos k_2l + i \sin k_2l ; \\ e^{-ik_2l} &= \cos k_2l - i \sin k_2l . \end{aligned}$$

Cu aceste notații avem

$$P_{11} = \frac{P_{13}}{2z_{13}} [(z_{13} + 1) \cos k_2l + i(z_{12} + z_{23}) \sin k_2l]. \quad (3.116)$$

Coeficientul de transmisie a energiei între mediile ρ_1c_1 și ρ_3c_3 este:

$$\tau = \frac{W_3}{W_1} = \frac{\frac{P_3^2}{2\rho_3c_3}}{\frac{P_1^2}{2\rho_1c_1}} = \left(\frac{P_3}{P_1}\right)^2 \frac{1}{z_{13}},$$

sau

$$\tau = \frac{4z_{13}}{(z_{13} + 1)^2 \cos^2 k_2l + (z_{12} + z_{23})^2 \sin^2 k_2l}. \quad (3.117)$$

Dar avem $\rho_1c_1 = \rho_3c_3$, caz în care $z_{12} = 1$ și $z_{23} = \frac{1}{z_{12}}$ deci obținem

astfel avem

$$\tau = \frac{1 + tg^2 k_2l}{1 + \frac{1}{4} \left(z_{12} + \frac{1}{z_{12}}\right)^2 tg^2 k_2l}. \quad (3.118)$$

Atenuarea dată de perete în dB este

$$R = D = 10 \lg \frac{1}{\tau} = 10 \lg \frac{1 + \frac{1}{4} \left(z_{12} + \frac{1}{z_{12}}\right)^2 tg^2 k_2l}{1 + tg^2 k_2l}, \quad (3.119)$$

unde $k_2 = \frac{\omega}{c_2}$ numărul de undă pentru mediul elastic ρ_2c_2 .

De exemplu pentru un perete de beton cu $\rho_2 v_2 = 8 \cdot 10^6 \frac{Ns}{m^3}$, cu $l = 12\text{cm}$, pentru $tgk_2 l \cong 1$ rezultă $R = D \cong 70\text{dB}$. Pe baza măsurărilor se constată că atenuarea este mult mai mică. Imprecizia este legată de faptul că nu s-a ținut seama de efectul inerțial al peretelui.

3.3.2 Propagarea undelor acustice pe un perete despărțitor monostrat modelat ca un mediu inerțial (corp solid rigid)

În cazul frecvențelor joase când lungimea de undă este mare ($\lambda = \frac{c}{f}$) și numărul de undă este mic ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$), iar lungimea de undă este mult mai mare decât grosimea peretelui ($\lambda \gg l$) particulele în contact cu peretele se deplasează în fază. Mișcarea peretelui constă dintr-o translație rectilinie alternativă așa încât acesta poate fi modelat ca un punct material liber sub acțiunea forțelor exterioare de presiune (fig. 3.10). Studiile efectuate până în prezent au asimilat mișcarea peretelui monostrat sub acțiunea undelor sonore cu cea a unui piston rigid care la rândul lui se constituie într-o sursă sonoră pentru spațiul din partea opusă sursei. Ipoteza folosită constă în aproximarea că peretele nu are legături pe contur. Pentru a fi acceptată această ipoteză s-a considerat că peretele este extins la infinit și că în fiecare punct al său acționează aceeași presiune.

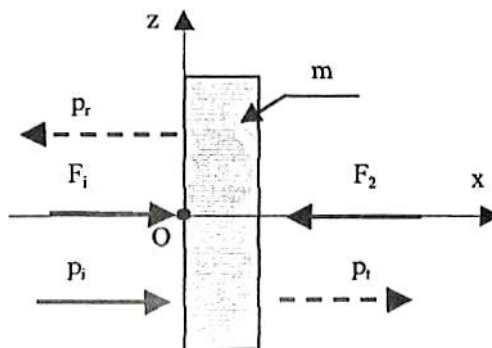


Fig. 3.10

Ecuția de mișcare proiectată pe axa Ox este

$$F_1 - F_2 = m\ddot{x}, \quad (3.120)$$

unde F_1 este forța normală exercitată ca urmare a presiunii create pe fața din stânga a peretelui;

F_2 - forța normală exercitată ca urmare a presiunii ce se formează pe fața din dreapta a peretelui;

m - masa peretelui monostrat.

Notăm cu S suprafața expusă a peretelui, cu $\mu = \frac{m}{S}$ masa unității de suprafață ,

iar cu $p_1 = \frac{F_1}{S}$ și $p_2 = \frac{F_2}{S}$ presiunile pe cele două fețe ale peretelui.

Împărțind relația (3.120) prin S avem

$$p_1 - p_2 = \mu \ddot{x}, \quad (3.121)$$

sau

$$\mu \frac{dv}{dt} = p_1 - p_2, \quad (3.122)$$

unde este viteza peretelui care este aceeași cu viteza particulelor de aer în contact cu peretele.

Considerăm că viteza v are o expresie periodică cu pulsația excitatoare ω , de forma

$$v = Ve^{i\omega t}, \quad (3.123)$$

iar

$$\frac{dv}{dt} = i\omega Ve^{i\omega t} = i\omega v,$$

care introdusă în (3.122) duce la relația

$$\mu\omega v = p_1 - p_2. \quad (3.125)$$

Ținând seama de notațiile din figura 3.10 pot fi scrise următoarele relații:

$$p_1 = p_i + p_r \quad (3.126)$$

$$p_2 = p_t \quad (3.127)$$

$$v_1 = v_i - v_r \quad (3.128)$$

$$v_2 = v_t \quad (3.129)$$

Pe de altă parte având în vedere că $v_1 = v_2 = v$, iar

$p_i = \rho_0 c v_i$, $p_r = \rho_0 c v_r$, $p_t = \rho_0 c v_t$ relația (3.128) poate fi scrisă sub forma, de

$$v_i - v_r = \frac{p_i}{\rho_0 c} - \frac{p_r}{\rho_0 c} = v,$$

unde de unde $p_i - p_r = \rho_0 c v$ sau $p_r = p_i - \rho_0 c v$

Din relația (3.120) avem $p_1 = p_i + p_i - \rho_0 c v$,

$$\text{sau } p_1 = p_i + p_i - \rho_0 c v, \quad (3.130)$$

iar din (3.129) obținem $v_t = v = \frac{p_1}{\rho_0 c}$ de unde:

$$p_t = \rho_0 c v = p_2. \quad (3.131)$$

Cu relațiile (3.130) și (3.131) ecuația (3.125) devine

$$2p_t - \rho_0 c v - \rho_0 c v = i\mu\omega v,$$

$$p_t = \frac{1}{2} i\mu\omega v + \rho_0 c v. \quad (3.132)$$

de unde avem

În acest caz, coeficientul de transmisie acustică t este

$$\tau = \frac{p_t^2}{p_i^2} = \left(\frac{\rho_0 c v}{\frac{1}{2} i\mu\omega v + \rho_0 c v} \right)^2 = \frac{1}{\left[\frac{i\mu\omega}{2\rho_0 c} + 1 \right]^2}, \quad (3.133)$$

cu ajutorul căruia se determină indicele de atenuare la zgomot aerian R sau atenuarea D în condițiile unui câmp acustic direct. Astfel, avem

$$R = D = 10 \lg \frac{1}{\tau} = 10 \lg \left[\left(\frac{\mu\omega}{2\rho_0 c} \right)^2 + 1 \right], \quad (3.134)$$

în care ținem seama că $\frac{\mu\omega}{2\rho_0 c} \gg 1$ așa încât se poate scrie forma finală după cum urmează

$$R = D = 10 \lg \left(\frac{\mu\omega}{2\rho_0 c} \right)^2,$$

sau

$$R = D = 20 \lg \frac{\mu\omega}{2\rho_0 c}, \text{ dB}. \quad (3.135)$$

Relația (3.135) se mai numește și legea masei deoarece atenuarea este influențată în mod direct de produsul .

Din analiza relației (3.135) se constată următoarele:

- indicele de atenuare R sau D crește odată cu mărirea frecvenței, în cazul unui perete cu masă dată. Sunetele de frecvență înaltă sunt atenuate mai bine decât cele de frecvență joasă;
- indicele de atenuare poate fi mărit în cazul sunetelor de frecvență joasă dacă se mărește masa peretelui, adică dacă se realizează un perete masiv;
- creșterea indicelui de atenuare în raport cu frecvența este de 6 dB pe

octavă, adică pentru ω avem $R_1 = 20 \lg \frac{\mu\omega}{2\rho_0 c}$, iar pentru 2ω obținem:

$$R_2 = 20 \lg \frac{2\mu\omega}{2\rho_0 c} = 20 \lg \frac{\mu\omega}{2\rho_0 c} + 20 \lg 2 = R_1 + 20 \cdot 0.3$$

ceea ce duce la $R_2 - R_1 = 6 \text{ dB}$

d) în cazul unei frecvențe constante *indicele de atenuare crește cu masa unității de suprafață p, legea masei;*

e) la frecvență constantă *indicele de atenuare crește cu 6 dB pentru fiecare dublare a masei.*

3.3.3 Propagarea undelor acustice pe un perete despărțitor monostrat modelat ca un mediu elastic inertial (corp solid deformabil)

Peretele despărțitor monostrat este modelat sub forma unei plăci omogene raportată la un sistem de axe Oxyz (fig. 3.11.a) și care datorită undelor directe normale intră într-o mișcare vibratorie pe direcția axei Ox simultan cu propagarea undelor de încovoiere (fig. 3.11.b). Astfel, datorită momentului de încovoiere M_2-M se nasc

forțe variabile pe direcția axei Ox de forma $F = \frac{\partial M}{\partial y}$, placa având rigiditatea

$B = \frac{EI_y}{1-\nu^2} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ și dimensiunile $l_x=h$, $l_y=dy$ și $l_z=1$. S-a notat cu E modulul lui Young și cu ν coeficientul lui Poisson.

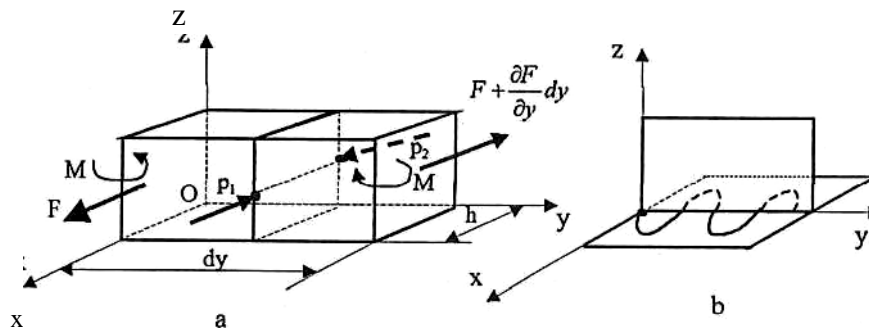


Fig. 3.11

Ecuatia vibrațiilor din încovoierea plăcii este de forma:

$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = -\frac{M}{B} \quad (3.136)$$

Ecuatia diferențială de mișcare a elementului unitar de perete, cu suprafața $dS = 1 \cdot dy$ în planul yOz, se obține din proiecția pe axa Ox a ecuației fundamentale a dinamicii, astfel

$$\rho \cdot l \cdot h \cdot dy \cdot \ddot{x} = (p_1 - p_2) \cdot l \cdot dy + F + \frac{\partial F}{\partial y} dy - F,$$

sau

$$\rho \cdot h \cdot dy \cdot \ddot{x} = (p_1 - p_2) \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial y} dy,$$

de unde:

$$\mu \ddot{x} = p_1 - p_2 + \frac{\partial F}{\partial y}, \quad (3.137)$$

în care $\mu = \rho h$ este masa unității de suprafață.

Din (3.136) avem $M = -B \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}$ și obținem $F = \frac{\partial M}{\partial y} = -B \frac{\partial^3 x}{\partial y^3}$, caz în care (3.137) poate fi scris astfel:

$$\mu \ddot{x} = p_1 - p_2 - B \frac{\partial^4 x}{\partial y^4}. \quad (3.138)$$

Pentru ca particula de aer de la suprafața peretelui să fie în contact permanent cu acesta, trebuie să aibă aceeași viteză cu a peretelui, adică:

$$\frac{dx}{dt} = v = V e^{i\omega t},$$

de unde:

$$x = \int v dt = V \int e^{i\omega t} dt = \frac{1}{i\omega} V e^{i\omega t} = \frac{v}{i\omega}. \quad (3.139)$$

Relația (3,138) poate fi pus sub forma și ținând seama de (1.139), avem

$$\mu \frac{dv}{dt} = p_1 - p_2 - B \frac{\partial^4 x}{\partial y^4},$$

$$\mu \frac{dv}{dt} = p_1 - p_2 - B \frac{1}{i\omega} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4}, \quad (3.140)$$

deoarece $x = \frac{v}{i\omega}$, caz în astfel încât relația $\frac{\partial^4 x}{\partial y^4}$ este $\frac{\partial^4 \left(\frac{v}{i\omega}\right)}{\partial y^4} = \frac{1}{i\omega} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4}$,
 (1.140) devine

$$p_1 - p_2 = i\omega\mu v + \frac{B}{i\omega} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4}. \quad (3.141)$$

Observație. Dacă peretele ar fi solid rigid, adică $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$, atunci am avea

$p_1 - p_2 = i\omega\mu v$, adică se ajunge la relația (3.125) obținută anterior la mișcarea de piston rigid a peretelui.

Unda de încovoiere a plăcii se transmite de-a lungul axei Oy. Considerăm undele incidente sub unghiul de incidență θ față de normala la placă, astfel încât în direcție Iui Oy se naște un defazaj datorită diferenței de drum $\Delta r = y \sin \theta$ (fig. 3.12).

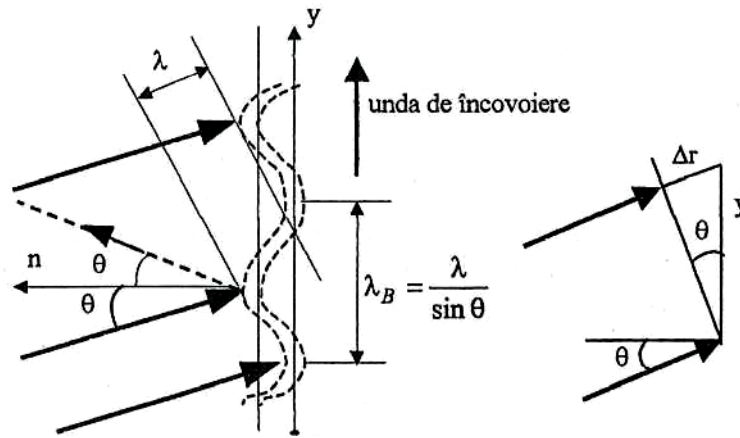


Fig. 3.12

Viteza v a particulei de aer în contact cu peretele va fi exprimată în funcție de Δr astfel $v = Ve^{i\omega\left(t - \frac{\Delta r}{c}\right)} = Ve^{i\omega\left(t - \frac{y \sin \theta}{c}\right)}$, care duce la

$$\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = \left(i\omega \frac{\sin \theta}{c}\right)^4 v = \left(\frac{\omega}{c} \sin \theta\right)^4 v. \quad (3.142)$$

În acest caz, expresia (1.141) devine $p_1 - p_2 = i\omega\mu v - v \frac{B}{i\omega} \frac{\omega^4}{c^4} \sin^4 \theta$, sau

$$p_1 - p_2 = i\omega\mu v + i \frac{B}{c^4} \omega^3 v \sin^4 \theta, \quad (3.143)$$

în care notăm $Z = \omega\mu - \frac{B}{c^4} \omega^3 \sin^4 \theta$ și avem:

$$p_1 - p_2 = Zvi, \quad (3.144)$$

unde: $\omega\mu$ este inertanța;

$\frac{B}{c^4} \omega^3 \sin^4 \theta$ - complianța.

Cazul critic. Vom considera situația în care presiunea incidentă se transmite integral pe fața cealaltă a peretelui, adică $p_1 = p_2$, denumit și caz critic, Astfel, din (3.141) avem

$$0 = i\omega\mu v - i \frac{B}{\omega} \frac{\partial^4 v}{\partial y^4}, \quad (3.145)$$

de unde obținem $\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = \omega^2 \frac{\mu}{B} v$, (3.146)

în care notăm $c_B^4 = \frac{\omega^2 B}{\mu}$, (3.147)

sau

$$c_B = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{B}{m}} = \sqrt[4]{\frac{\omega^2 EI_y}{\mu(1-\nu^2)}}, \quad (3.148)$$

este viteza undei de încovoiere prin perete.

Din (3.147) avem $\frac{\mu}{B} = \frac{\omega^2}{c_B^4}$, astfel încât (3.146) devine $\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} = \omega^2 \frac{\omega^2}{c_B^4} v$,

sau

$$\frac{\partial^4 v}{\partial y^4} - \left(\frac{\omega}{c_B}\right)^4 v = 0, \quad (3.149)$$

cu soluția generală de forma

$$v = C_1 e^{\alpha y} + C_2 e^{-\alpha y} + C_3 e^{i\alpha y} + C_4 e^{-i\alpha y} \quad (3.150)$$

unde: $\alpha = \frac{\omega}{c_B}$

Pentru $p_1 = p_2$ din (3.143) avem $0 = \omega\mu - \frac{B}{c^4} \omega^3 \sin^4 \theta$, sau $\frac{B\omega^2 \sin^4 \theta}{\mu c^4} = 1$

și ținând seama de $\frac{B\omega^2}{\mu} = c_B$, obținem $\frac{c_B^4}{c^4} \sin^4 \theta = 1$, de unde

avem

$$c_B = \frac{c}{\sin \theta}. \quad (3.151)$$

Rezultă că pentru cazul critic putem scrie $c_B^2 = \omega \sqrt{\frac{B}{\mu}} = 2\pi f_{cr} \sqrt{\frac{B}{\mu}}$ sau

$$\frac{c^2}{\sin^2 \theta} = 2\pi f_{cr} \sqrt{\frac{B}{\mu}}, \text{ de unde rezultă}$$

$$f_{cr} = \frac{c^2}{2\pi \sin^2 \theta} \sqrt{\frac{\mu}{B}} \quad (3.152)$$

Din relația (3.152) avem cea mai mică frecvență critică $(f_{cr})_{\min}$ pentru $\theta = \frac{\pi}{2}$

cazul undelor directe paralele cu peretele. Astfel, avem:

$$(f_{cr})_{\min} = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu}{B}}, \quad (3.153)$$

sau

$$(f_{cr})_{\min} = \frac{c^2}{2\pi h} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)\mu}{E}} \quad (3.154)$$

În scopul evitării transmerii sunetului prin perete, fără amortizare, se caută să se coboare frecvența minimă până la limita audibilității. În general, pentru pereții groși se adoptă frecvențe critice sub 100 Hz, iar pentru pereții subțiri peste 3200 Hz.

Corelația dintre frecvența critică și grosimea peretelui este dată, pentru diverse materiale, în figura 3.13.

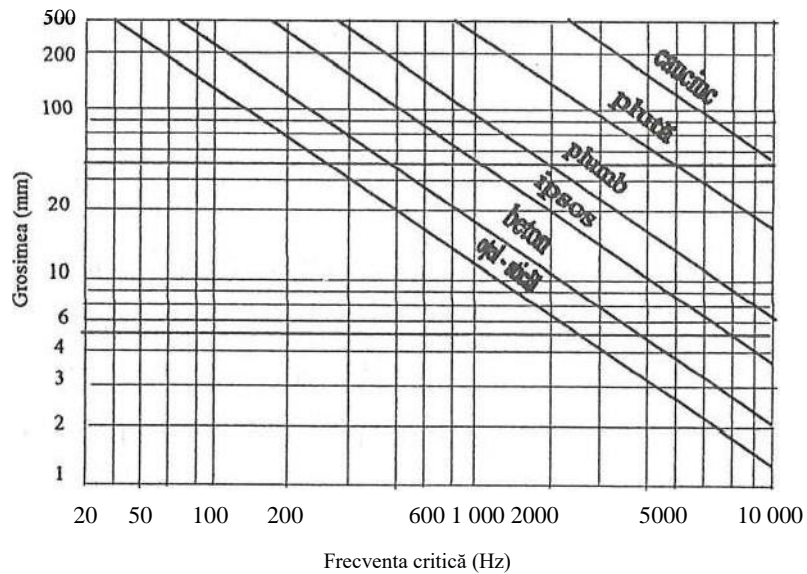


Fig. 3.13

3.4. Incintă cu paravane acustice

Considerăm o incintă paralelipipedică, în interiorul căreia se află un paravan cu barieră acustică, amplasat între sursa de acustică A și un punct receptor B la înălțimea H față de planul orizontal (fig. 3.14).

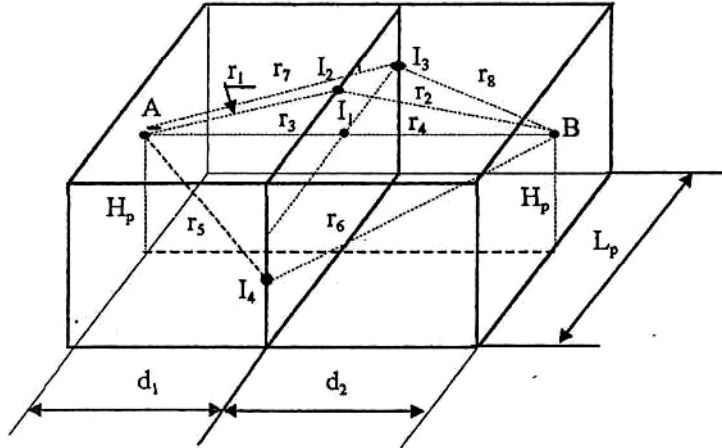


Fig. 3.14

Dacă n-ar exista paravanul, atunci presiunea în punctul de recepție B ar fi

$$\bar{p}^2 = \rho_0 c W \left(\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{4}{R} \right)$$

dată de relația (3.108) de forma , în Pa^2 , iar cu ajutorul (3.107) avem nivelul acustic în punctul B funcție de puterea sursei, astfel

$$L_p = 10 \lg \frac{W}{W_0} + 10 \lg \left(\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{4}{R} \right).$$

Dacă se ține seama de paravan, atunci în punctul B vom avea p' care se compune din presiunea câmpului reverberant p_r și presiunea câmpului acustic difractat p_b la marginile paravanului, de forma

$$p'^2 = p_r^2 + p_b^2. \quad (3.155)$$

Atenuarea D produsă de paravan este

$$D = L_p + L' = 10 \lg \left(\frac{p}{p_{ref}} \right)^2 - 10 \lg \left(\frac{p'}{p_{ref}} \right)^2 = 10 \lg \left(\frac{p}{p'} \right)^2 \quad (3.156)$$

Introducem ipoteza că în ambele părți ale paravanului sunt condiții acustice staționare, iar aria paravanului este mică în raport cu aria peretelui cu care este paralel, ceea ce înseamnă că nu se modifică structura câmpului reverberant. Adică, în ambele situații, cu și fără paravan acustic, avem

$$p_r^2 = W\rho_0 c \frac{4}{R}. \quad (3.157)$$

Pentru presiune difractată p_b vom folosi formula Moreland și Musa, de forma

$$p_b^2 = p_d^2 \sum_{j=1}^n \frac{1}{3+10N_j}, \quad (3.158)$$

unde: p_d^2 este presiunea medie pătratică a câmpului direct fără bariera acustică;

$N_j = \frac{2\delta_j}{\lambda}$ - numărul lui Fresnel;
 δ_j - diferența de drum dintre raza acustică directă și cea difractată, de la sursa A la receptorul B;
 λ - lungimea de undă a sunetului.

Diferența de drum rezultă din figura 3.14, astfel :

$$\begin{aligned} \delta_1 &= (r_1 + r_2) - (r_3 + r_4), \\ \delta_2 &= (r_5 + r_6) - (r_3 + r_4), \\ \delta_3 &= (r_7 + r_8) - (r_3 + r_4). \end{aligned}$$

Deci

$$p_b^2 = W\rho_0 c \frac{Q_B}{4\pi r^2}, \quad (3.159)$$

unde

$$Q_B = Q \sum_1^3 \frac{1}{3+10N_j} = Q \sum_1^3 \frac{\lambda}{3\lambda + 20\sigma_j} \quad (3.160)$$

este coeficientul de directivitate al sursei în zona de "umbră" din sptele paravanului.

În acest caz va fi de forma $p'^2 = p_r^2 + p_b^2$

$$p'^2 = W\rho_0 c \left(\frac{Q_B}{4\pi r^2} + \frac{4}{R} \right), \quad (3.161)$$

similară cu (3.108).

Cu ajutorul relațiilor (3.108) și (3.161) vom determina atenuarea D a paravanului, folosind relația (3.156), astfel:

$$D = 10 \lg \left(\frac{P}{P'} \right)^2 = 10 \lg \left[\frac{\frac{Q}{4\pi r^2} + \frac{4}{R}}{\frac{Q_B}{4\pi r^2} + \frac{4}{R}} \right]. \quad (3.162)$$

Analiza unor cazuri particulare

a) *Barieră acustică în câmp liber*

Deoarece $R = \frac{\bar{\epsilon} S}{1 - \bar{\alpha}} \rightarrow \infty$ nu se poate crea un câmp difuz, astfel încât din

(3.162) avem

$$D = 10 \lg \frac{Q}{Q_B}. \quad (3.163)$$

Pentru o cameră anecoică unde pentru anumite frecvențe se poate realiza un câmp liber, considerăm un paravan cu grosimea de 3 cm, din panel cu $\alpha = 0,8$ la 1 000 Hz. Dimensiunile camerei sunt 6 x 5 x 3,5 m, iar sursa și receptorul sunt la $H = 0,2$ m. Paravanul are lungimea $L_p = 2$ m și înălțimea $H_p = 1,2$ m.

Distanța în linie dreaptă între sursă și receptor este 1,5 m, iar sursa se află la 2,6 m față de peretele cel mai scurt al incintei. Din calcule rezultă

$$\lambda = \frac{c}{f} = \frac{344}{1000} = 0,344 \text{ m}; \quad \delta_1 = 0,73 \text{ m}; \quad \delta_2 = 0,80 \text{ m}; \quad \delta_3 = 0,80 \text{ m}.$$

$$\frac{Q_B}{Q} = \sum_{j=1}^3 \frac{\lambda}{3\lambda + 20\delta_j} = 0,344 \left[\frac{1}{3 \cdot 0,344 + 20 \cdot 0,73} + \frac{2}{3 \cdot 0,344 + 20 \cdot 0,80} \right] \cong 0,063$$

Atenuarea produsă de paravan în punctul de recepție B este

$$D = 10 \lg \frac{Q}{Q_B} - 10 \lg \frac{1}{0,063} \cong 12 \text{ dB}$$

b) Paravan cu barieră acustică într-o incintă reverberantă de mari dimensiuni

Cazul halelor industriale este caracterizat prin prezența unui câmp acustic reverberant puternic. Incintelor de acest fel le sunt specifice următoarele inegalități

$$\frac{4}{R} \gg \frac{Q}{4\pi r^2} \text{ și } \frac{4}{R} \gg \frac{Q_B}{4\pi r^2},$$

de unde rezultă că efectul paravanului pe ansamblu este foarte mic.

În situația unui paravan acustic foarte înalt sunetul se va dispersa pe latura superioară (fig. 3,16).

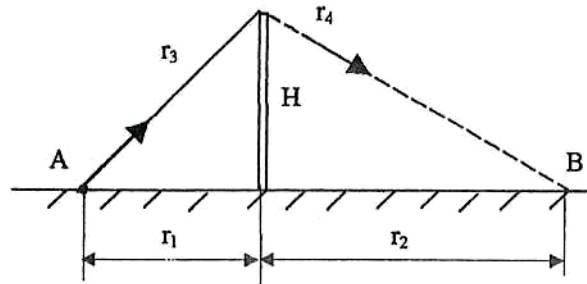


Fig. a16

Diferența de drum δ_1 va fi

$$\delta_1 = (r_3 + r_4) - (r_1 + r_2) = \sqrt{H^2 + r_1^2} + \sqrt{H^2 + r_2^2} - (r_1 + r_2),$$

sau

$$\delta_1 = r_1 \left\{ \left[1 + \left(\frac{H}{r_1} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} + r_2 \left\{ \left[1 + \left(\frac{H}{r_2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\}.$$

Presupunând că $r_2 \gg r_1 \gg H$ și dezvoltând în serie de puteri radicalii cu limitarea la primii doi termeni, avem :

$$\delta_1 = r_1 \left(1 + \frac{H^2}{2r_1^2} - 1 \right) = \frac{H^2}{2r_1}.$$

(3.164)

Astfel avem

$$\frac{Q_B}{Q} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\lambda}{3\lambda + 20\delta_j}} = \frac{\lambda}{3\lambda + 20 \frac{H^2}{2r_1}}, \quad (3.165)$$

iar atenuarea paravanului în punctul B va fi:

$$D = 10 \lg \frac{Q}{Q_B} = 10 \lg \frac{3\lambda + \frac{10H^2}{r_1}}{\lambda}, \quad (3.166)$$

unde $10 \frac{H^2}{r_1} \gg 3\lambda$ ceea ce duce la

$$D = 10 \lg \frac{10H^2}{\lambda r_1}, \text{ dB} \quad (3.167)$$

Numeric: $H = r_1 = 1.8\text{m}$, $r_2 = 5.5\text{m}$, $f = 1000\text{Hz}$, $c = 344 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Rezultă $\lambda = \frac{c}{f}$

și $D = 10 \lg \frac{10 \cdot 1.8^2}{344 \cdot 1.8} \cdot 1000 \cong 17\text{dB}$.

Acest exemplu evidențiază eficiența montării paravanelor în hale industriale în jurul locurilor de muncă cu surse de zgomot unde funcționează perforatoare, ciocane, mașini de debitat, finisat, etc.

3.5 Incinte de atenuare a zgomotului

3.5.1 Incintă atenuatoare de zgomot montată între două conducte

În figura 3.17 se prezintă o incintă care conectează două conducte de secțiune circulară sau rectangulară

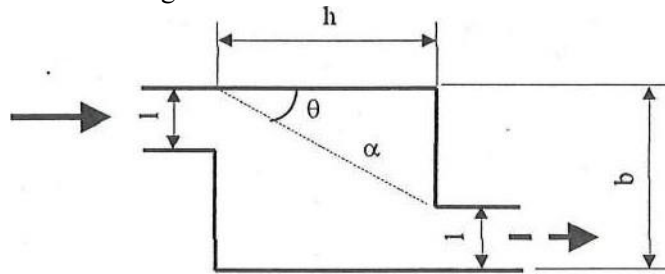


Fig. 3.17

Incinta este materializată de o cameră de formă paralelipipedică fiind căptușită cu material fonoabsorbant protejat cu folie. Prin conductă și camera de atenuare trec gaze arse cu o anumită viteză și temperatură. O astfel de incintă atenuatoare face parte din categoria *tobelor de eșapament* și are menirea să funcționeze ca un organ reactiv pentru atenuări de cca 10dB la frecvențe joase și de 20dB la frecvențe înalte de cca 1000Hz.

Performanțele de atenuare ale zgomotului cu o astfel de cameră se obține astfel:

- mărirea grosimii materialului absorbant al căptușelii pereților interiori;
- eliminarea "vizării directe", adică a liniei drepte, între intrarea și ieșirea curentului de fluid, fie prin panel fonoabsorbant, fie prin camere multiple;
- mărirea secțiunii transversale a camerei în raport cu secțiunile conductelor de intrare și ieșire.

Calculul aproximativ al atenuării este posibil cu formula

$$D = -10 \lg \left[A \left(\frac{\cos \theta}{2\pi d^2} + \frac{1 - \bar{\alpha}}{\bar{\alpha} A_c} \right) \right], \text{ dB} \quad (3.168)$$

unde $\bar{\alpha}$ este coeficientul mediu de absorbție al pereților camerei; A

- aria transversală conductelor la intrare și ieșire;

A_c - aria totală a pereților camerei.

Exemplu. Pentru $A = 2.23\text{m}^2$, $\theta = 30^\circ$, $d = 3.66\text{m}$, $A_c = 34.7\text{m}^2$ și pentru frecvențele din tabel se obține D, dB.

F, Hz	125	250	500	1000	2000	4000
$\bar{\alpha}$	0.2	0.53	0,85	0,93	0.83	0.78
D,dB	3.9	6.8	7.9	8.1	7.9	7.7

3.5.2 Tobă de eșapament reactivă

Toba de eșapament reactivă se realizează sub forma unei camere de expansiune a fluidului care are menirea să creeze o discontinuitate în traseul conductei de evacuare a gazelor de eșapament (fig.3.18).

Pentru o astfel de incintă se ține seama de lungimea de undă a sunăului incident.

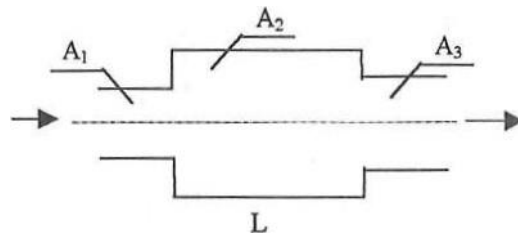


Fig. 3.18

Camera trebuie proiectată astfel încât să reducă nivelul zgomotului într-o bandă foarte îngustă de frecvențe. Se poate folosi o cascadă de camere montate în serie pentru a atenua zgomotele pe mai multe benzi înguste de frecvențe.

Pentru o singură tobă atenuarea este

$$D = 10 \lg \left[1 + \frac{1}{4} \left(\alpha - \frac{1}{\alpha} \right)^2 \sin^2 kL \right], \text{ dB} \quad (3.169)$$

unde $\alpha = \frac{A_2}{A_1}$, $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi f}{c}$ L - lungimea camerei.

Se impune condiția ca cea mai mare dimensiune transversală a camerei să fie inferioară lui 0.81.

Pentru o eficiență maximă trebuie ca să avem $kL = \frac{n\pi}{2k}$, $n=1, 2, 3$, de unde

lungimea camerei L este $L = \frac{n\pi}{2k} = n \frac{\lambda}{4}$, $n=1, 3, 5$.

În figura 3.19 se reprezintă atenuarea D a unei camere de eșapament funcție de α și kL .

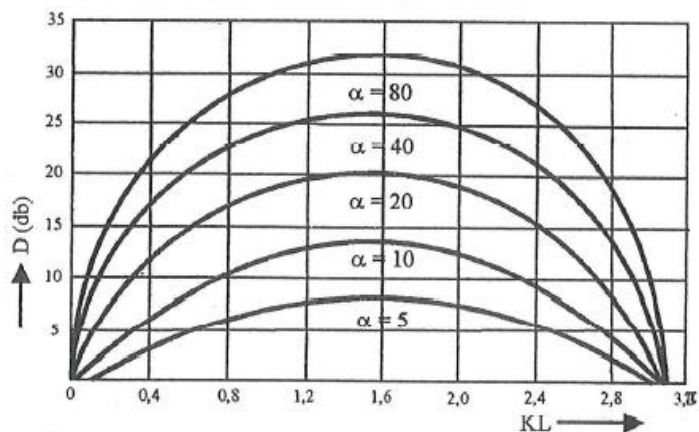


Fig . 3.19

Urmărind figura 3.19 se observă că diagrama este construită pe baza variabilei $kL \in [0, 2\pi]$.

Exemplu. Pentru un zgomot de bandă îngustă $f = 125\text{Hz}$ se impune o atenuare de 25dB. Știind că temperatura gazelor de eșapament este de 93°C se cere lungimea L folosind figura 3.19.

Din curba $\alpha=40$ pentru $D_{\max}=26\text{dB}$ avem $kL = 1.6 \cong \frac{\pi}{2}$, de unde

$$L = \frac{\pi}{2k} = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f},$$

în care $c = 20.05\sqrt{T} = 20.05\sqrt{273 + 93} = 384\text{m/s}$

Astfel, obținem $L = \frac{384}{4 \cdot 125} = 0.8\text{m}$

Rezultă că atenuarea eficientă se va realiza în banda de frecvențe ce rezultă din figura 3.19 astfel

$(kL)_{\min}=1.09$, de unde $f_{\min} = 87\text{Hz}$;

$(kL)_{\max}=2.00$, de unde $f_{\max} = 159\text{Hz}$.

Lățimea benzii de frecvență este $\Delta f = f_{\max} - f_{\min} = 159 - 87 = 72\text{Hz}$, pentru care atenuarea este $D = 26\text{ dB}$.

4

REDUCEREA NIVELULUI DE ZGOMOT LA MAȘINI

4.1. Principalele surse de zgomot la mașini

Zgomotul își are originea în procesele mecanice, magnetice, aerodinamice și hidrostactice, care apar în timpul funcționării pentru executarea ciclurilor de lucru. Astfel, cauzele apariției zgomotului, generate de procesele menționate, pot fi grupate în felul următor: interacțiunea prin șoc a două sau mai multe corpuri, frecarea suprafețelor care interacționează, turbulențele aerodinamice, oscilațiile forțate ale corpurilor solide, acțiunea forțelor magnetice variabile (mai ales la grupurile de acționare electrică), vibrația pieselor în formă de bară sau membrană, pulsația presiunii în sistemele de acționare hidrostatică.

4.1.1. Zgomotul generat de motoarele de ardere internă

Principalele cauze ale generării zgomotului la motoarele cu ardere internă pot fi sintetizate astfel:

- efectele aerodinamice ale gazelor arse la evacuare și a aerului proaspăt la admisie;
- foștele produse prin șoc datorită jocurilor tehnologice sau ca urmare a uzurii;
- forțele de frecare la alunecare în cuplele sistemelor mecanice componente;
- vibrațiile ansamblului arbore cotit, bielă, manivelă, piston sub influența forțelor de presiune a gazelor din cilindri, forțelor și cuplurilor neechilibrate;
- vibrațiile blocului motor și a carterului, ca urmare a acțiunii tuturor forțelor și a cuplurilor neechilibrate;
- funcționarea subsansamblelor auxiliare ale motorului, cum sunt: ventilatorul de răcire, pompa de injecție, pompa de apă și pompa de ulei, dinamul și altele.

Energia acustică maximă corespunde unui număr de componente armonice cu frecvența fundamentală f_1 dată de relația:

$$f_1 = \frac{ni}{60z} \quad (4.1)$$

în care: n este turația arborelui cotit, în rot/min;

i – numărul de cilindri;

z – un coeficient care depinde de tipul motorului ($z = 1$, pentru motoarele în doi timpi și $z = 2$, pentru motoarele în patru timpi).

Analiza spectrală a zgomotului generat este singura metodă pentru identificarea surselor de zgomot din cadrul motorului.

Nivelul de presiune acustică la 1 m distanță pentru motoarele cu ardere internă la funcționarea în gol poate fi determinat astfel:

- pentru motoarele cu ardere internă în patru timpi:

$$L_g = 30 \lg n + 50 \lg D - 31,5 \text{ dB(A)}; \quad (4.2)$$

- pentru motoarele cu ardere internă în patru timpi:

$$L_g = 40 \lg n + 50 \lg D - 54,5 \text{ dB(A)} \quad (4.3)$$

în care: n este turația arborelui cotit, în rot/min;

D - diametrul arborelui de evacuare, în m.

Atunci când motoarele cu ardere internă sunt montate pe mașinile de construcții și funcționează în sarcină, se utilizează relația:

$$L'_s = 30 \lg v + 5 \lg \frac{l}{100} i + 69 \text{ dB(A)}, \quad (4.4)$$

unde: v este viteza de evacuare a gazelor arse, în m/s;

l - lungimea traseului de evacuare, în m;

i - numărul cilindrilor.

În cazul în care se cunoaște numai puterea P și turația n de lucru, pentru motoarele cu aprindere prin compresie, se poate aplica formula:

$$L_s = 30 \lg n + 12 \lg P - 9, \quad (4.5)$$

unde: n este turația, în rot/min;

P - puterea, în CP.

Nivelul de presiune acustică produs de funcționarea ventilatorului de răcire din dotarea motorului este dat de formula:

$$L_v = 70 \lg D_v + 50 \lg \frac{n_v}{1000} + k_v \text{ dB(A)}, \quad (4.6)$$

în care: D_v este diametrul paletelor ventilatorului, în m;

n_v - turația rotorului ventilatorului, în rot/min;

k_v - (95... 115) dB.

4.1.20 Zgomotul generat de organe de mașini din componența mașinilor de construcții

Producerea zgomotului de organele de mașini are la bază modul necorespunzător de execuție, de montaj și de proiectare, privind relația funcțională, constructivă și de exploatare, care există în elementele conjugate din componența mașinilor de construcții.

a. *Zgomotul produs de lagăre*. În cazul lagărelor de alunecare, procesele de frecare sunt cauza predominantă, de generare a zgomotului. Astfel, dacă ungerea la presiunea atmosferică nu se realizează în mod corespunzător, iar alunecarea pe lagăr depășește valorile limită prescrise în documentație, atunci energia acustică se repartizează pe un număr de componente armonice, având armonica fundamentală corespunzătoare turației de funcționare.

Atunci când ungerea hidrodinamică pentru lagăre de alunecare la turații și sarcini mari nu este corespunzătoare, apare fenomenul de vârtej a peliculei de lubrifianț. Aceasta conduce la apariția unui zgomot, a cărui analiză spectrală evidențiază armonica fundamentală mai mică decât turația axului, de obicei corespunzător la $0,5 n$.

Pentru lagărele de rostogolire (rulmenți), cauzele generatoare de zgomot sunt datorate următoarelor procese mecanice: deformarea căilor, a corpurilor de rostogolire și a coliviei. Analiza spectrală a zgomotului se caracterizează prin prezența unor armonice fundamentale discrete, a căror frecvență se calculează astfel:

$$\begin{aligned}
 f_1 &= \frac{nd}{60(d+D)}; \\
 f_2 &= \frac{n}{60}; \\
 f_3 &= \frac{nDd}{60(d+D)d_c} \\
 f_4 &= \frac{ind}{60(d+D)}; \\
 f_5 &= \frac{ind}{60(d+D)};
 \end{aligned}
 \tag{4,7}$$

în care: f_1 este frecvența componente fundamentale a zgomotului generat de deformarea simultană a căilor și corpurilor de rulare;

f_2 -frecvența componente fundamentale a zgomotului produs de excentricitatea dintre axa geometrică a arborelui față de axa geometrică a lagărului;

f_3 -frecvența componente fundamentale a zgomotului generat de deformarea corpurilor de rulare;

f_4 -frecvența componente fundamentale a zgomotului generat de deformarea căii exterioare de rulare;

f_5 – frecvența componentei fundamentale a zgomotului generat de deformarea căii interioare de rulare;

n – turația arborelui, în rot/min;

d – diametrul căii interioare de rulare, în cm;

D – diametrul căii exterioare de rulare, în cm;

d_c – diametrul corpurilor de rulare, în cm;

i – numărul corpurilor de rulare.

Cercetările au evidențiat faptul că presiunea acustică globală a zgomotului produs de rulmenți crește cu mărirea diametrului exterior al lagărului, sau a turației de lucru. De asemenea, se subliniază că rulmenții cu bile, pentru aceleași condiții funcționale de sargină, turație, rezemare, sunt mai silențioși cu cel puțin 10 dB față de rulmenții cu role.

b. *Zgomotul produs de angrenaje*. Cauzele care generează zgomotul în funcționarea mecanismelor (angrenajelor) cu roți dințate sunt:

- *constructive*, determinate de următoarele elemente: modulul danturii, lățimea coroanei dințate, unghiul de înclinare a danturii, deplasarea profilului, materialul folosit etc;

- *tehnologice*, determinate de următorii factori: clasa de precizie, abaterea de la forma dintelui de la parametrii de generare a danturii etc.;

- *de exploatare*, ca: turația de funcționare, sarcina de lucru, ungerea etc.

În timpul angrenării, ca urmare a modificării sensului forțelor de frecare pe flancurile dinților, apar șocuri puternice, localizate în punctele situate pe cercul primitiv. Aceasta conduce la un zgomot, a cărui energie acustică este repartizată pe un anumit număr de componente armonice ale unde fundamentale a cărei frecvență f_1 , în Hz, este exprimată funcție de turația n , în rot/min și numărul de dinți z , astfel:

$$f_1 = \frac{zn}{60}, \quad (4,8)$$

Un alt fenomen care constituie cauza apariției zgomotului este apariția pungilor de aer, care, prin expulzarea aerului dintre dinții care intră în angrenare și prin realizarea vidului dintre dinții ce ies din angrenare, generează un efect de pompare a aerului. Acesta conduce la un zgomot, cu atât mai mare, cu cât viteza periferică este mai mare, iar fenomenul poartă numele de "efect de sirenă".

Apariția pungilor de lubrifianț constituie o cauză importantă de generare a zgomotului, la valori mai mari decât în cazul aerului, mai ales în situația când debitul de lubrifianț este mai mare decât cantitatea prescrisă de relația:

$$Q_a = jv_l, \quad (4.9)$$

unde: j este mărimea jocului la fiindul dinților, în cm;

v - viteza periferică a cercului primitiv, în cm/s;

l - lățimea flancului unui dinte, în cm..

4.1.3. Zgomotul produs de mașini electrice

Mașinile electrice din dotarea utilajelor de construcții constituie surse de zgomot datorită fenomenelor mecanice de ciocnire și frecare, fenomenelor turbionare de circulație a aerului și fenomenelor de generare a forțelor magnetice alternative. Zgomotul mecanic își are sursele în neechilibrarea părților rotitoare ale mașinii, apariția forțelor de ciocnire și frecare în lagăre, în perii etc. Zgomotul turbionar este generat de ventilatorul pentru circulația forțată a aerului de răcire a părții fixe.

De asemenea, în cazul dirijării aerului de răcire de-a lungul rotorului apare zgomotul turbionar, asemănător zgomotului generat de ventilatoare centrifugale.

Zgomotul magnetic are drept cauză pulsația câmpului magnetic în zona întrefierului mașinii electrice, producând vibrația părților componente ale rotorului și ale statorului. De asemenea, apar forțe magnetice alternative parazite, ca urmare a imperfecțiunii execuției sau abaterilor de montaj, ce conduc la variația radială a întrefierului.

4.1.4. Zgomotul produs de sistemele de acționare hidrostatică

Sistemele de acționare hidrostatică, care se compun din elemente de comandă și execuție, dispuse atât în cabină, cât și în exterior, pe utilaj, constituie o sursă importantă de generare a zgomotului.

Principalele elemente generatoare de zgomot din cadrul sistemelor de acționare hidrostatică, din dotarea utilajelor de construcții, sunt de pompare și motoarele hidrostatice. Prin însăși principiul de funcționare, pompele generează zgomot, care poate fi evaluat cu ajutorul formulei:

$$L_A = 69 + 14 \lg \left(\frac{nq}{450} p_r \right) \text{ dB(A)}, \quad (4.10)$$

unde: n este turația, în rot/min;

q - debitul specific, în rot/min;

p_r - de refulare, în bar.

Cauzele zgomotului produs de pompele hidrostatice constând în: pulsația debitului și a presiunii de refulare, zgomotul refulat de părțile metalice ale părților componente, fenomenul de cavitație, turbionarea ueliului hidraulic.

Zgomotul în instalațiile hidraulice este generat și de funcționarea elementelor mecanice din componența acestora: supape, clapete, conducte etc. La conducte, zgomotul produs are componente ale spectrului de frecvențe, care se pot calcula cu formula:

$$f_a = \alpha \sqrt{\frac{EI}{ml^3}}. \quad (4.11)$$

4.2. Materiale antivibratile și fonoabsorbante, utilizate la combaterea zgomotului

În vederea adoptării celor mai eficiente soluții de tratare antivibratilă și antifonică, la insonorizarea cabinei și prin carcasarea surselor din structura mașinii, se impune cunoașterea cât mai precisă a valorilor parametrilor caracteristici ai materialelor utilizate. Aceasta servește la realizarea unei selecții bazate pe criteriul performanței maxime, ținând seama și de elementele tehnico — economice ale aplicării. Astfel, la materiale antivibratile care se aplică pereților cabinei, capotajului, măștilor de protecție etc. caracterizate prin vibrații structurale, este necesar a cunoaște legitatea de variație a coeficientului de amortizare, funcție de frecvență. De asemenea, la materiale fonoabsorbante, se impune cunoașterea variației coeficientului de absorbție funcție de frecvență. Se menționează că testările trebuie făcute, atât pentru materiale simple, cât și pentru structuri compuse din materiale simple, iar valorile experimentale trebuie să ducă la formularea opțiunii asupra soluției tehnice adoptate.

În acest caz, se conturează două direcții principale de testare experimentală:

- a) determinarea caracteristicilor antivibratile, în vederea amortizării vibrațiilor structurale, generate prin crearea efectului de undă ce se propagă în structura metalică cu rigiditate redusă, caz în care zonele ventrelor devin surse radiante de zgomot;
- b) determinarea caracteristicilor fonoabsorbante, în vederea realizării de structuri compuse din materiale simple, pentru reducerea nivelului de zgomot.

4.2.1. Materiale antivibratile

În vederea adoptării structurilor antivibratile, compuse pe bază de materiale simple, este necesar a se efectua probe de laborator pentru determinarea coeficientului de amortizare a undelor sonore, care constituie un important indicator al proprietăților antivibratile. Se menționează faptul că modulul de elasticitate complex al materialelor antivibratile are două componente în cvadratură: una de natură elastică, iar cealaltă disipativă de natură vâscoasă, astfel:

Acustica interioară pentru construcții și mașini

$$G^* = G_0(1 + j\eta), \quad (4.12)$$

Unde: n este factorul disipativ de natură vâscoasă (coeficientul de amortizare); j = unitatea imaginară;

G_0 - modulul de elasticitate transversal corespunzător comportării elastice.

În acest caz, viteza de propagare a unei acustice se poate exprima sub forma:

$$c^* = c(1 + j\eta)^{-\frac{1}{2}},$$

iar numărul de undă complex k^* se scrie astfel:

$$k^* = \frac{\omega}{c} (1 + j\eta)^{-\frac{1}{2}},$$

sau

$$k^* = \frac{\omega}{c} (1 - \frac{1}{2}\eta j). \quad (4.13)$$

Expresia presiunii acustice, după modelul propagării undelor plane progresive, este:

$$\tilde{p} = A \exp [j(\omega t - k^* x)], \quad (4.14)$$

sau, ținând seama de formula (4.13), se obține:

$$\tilde{p} = A e^{-x\psi} e^{j(\omega t - \beta x)}, \quad (4.15)$$

unde: $\psi = \frac{1}{2}\eta \frac{\omega}{c}$ este constanta de atenuare;

$$\psi = \frac{1}{2}\eta \frac{\omega}{c}$$

constanta de fază.

$$\beta = \frac{\omega}{c}$$

Semnificația fizică a constantei de atenuare se explică prin scăderea exponențială a amplitudinii presiunii, iar pentru unitatea de lungime $x = 1$, constanta de atenuare este tocmai decrementul logaritmic al amplitudinii presiunii, adică:

$$\ln \frac{A \exp(-\psi x)}{A \exp[-\psi(x+1)]} = \ln e^\psi = \psi. \quad (4.16)$$

Rezultă că această constantă de atenuare crește direct proporțional cu pulsația (j și scade cu viteza de propagare c).

Pe de altă parte, coeficientul de amortizare η se poate scrie sub forma:

$$\eta = \frac{2\psi c}{\omega}, \quad (4.17)$$

ceea ce înseamnă că, pentru un material dat, coeficientul de amortizare scade cu creșterea pulsației unde de propagare.

La tratarea antivibratilă și fonoabsorbantă a pereților și carcaselor din tablă, au fost utilizate următoarele materiale (tabelul 4.1):

- a) placă de cauciuc lis de 65° ShA;
- b) suport textil impregnat cu latex "Neterom dublu supergreu".

Tabelul 4.1

Nr. crt.	Denumirea	Grosime, mm	Densitate, cm
1	Suport textil impregnat tip " Neterom dublu supergreu"	3	0,412
2	Suport textil neimpregnant " Intersin F "	3	0,135
3	Piele sintetică " Sinapa tip greu	1	0,392
4	Placă de cauciuc tip CD x 60	4	1,194
5	Placă de deșeuri textile tip "TEFO"	13	0,168
6	Placă din poliuretan "Spumotin"	4,5	0,029
7	Placă din lafex	13	0,13

Pentru determinarea experimentală a caracteristicilor antivibratile, se utilizează metoda OBERST, care se bazează pe măsurarea vitezei de amortizare D a vibrațiilor, plecând de la nivelul maxim al vibrațiilor de rezonanță în care este menținută proba. Viteza de amortizare D se determină la frecvențele de rezonanță identificate prin excitarea la frecvență variabilă a probei, simultan cu analizarea semnalului de răspuns.

Astfel se poate scrie:

$$D_n = v \frac{L_n}{s} \quad [dB/s], \quad (4.18)$$

în care: L_n este nivelul de răspuns al probei la excitația continuă în rezonanță corespunzătoare frecvenței proprii f_n de ordinul n , în dB;
 v - viteza de derulare a hârtiei la înregistrare, în mm/s;
 s - spațiul parcurs de hârtie între două repere fixe, în mm. Coeficientul de amortizare se determină cu ajutorul relației:

$$\eta = 0,0366 \frac{D_n}{f_n}. \quad (4.19)$$

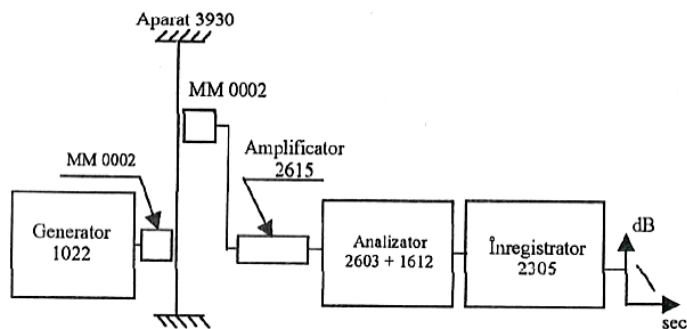


Fig. 4.1

Lanțul de aparate utilizat pentru testarea materialelor antiyibratile este prezentat în schema bloc din fig. 4.1. și se bazează pe aparatura de specialitate marca Briel & Kjaer. Proba de încercare este compusă din materialul antivibratil aplicat direct prin lipire pe o lamelă din tablă de aceeași grosime cu a elementului real ce urmează a fi tratat antivibratil.

Această lamelă este fixați încastrat la ambele capete și excitată cu ajutorul unui generator cu frecvență variabilă.

Utilizând metoda descrisă, au fost testate mai multe materiale antivibratile, care se află în producția curentă la noi în țară, astfel: cauciuc de 4 mm simbol CDX' 60, cauciuc de 3 mm simbol CN, cauciuc de 2 mm simbol CN și pâslă sintetică impregnată cu latex " Neterom dublu super greu ".

Rezultatele experimentale sunt prezentate în figura 4.2.

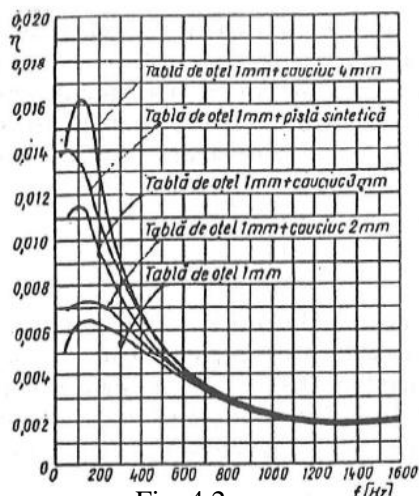


Fig. 4.2

Pe baza acestor rezultate se constată că efectul de amortizare a vibrațiilor diferă de la un material la altul, atingându-se valori maxime în gama de frecvență (0 - 500) Hz.

Pentru domeniul de frecvență (500 — 1600) Hz, coeficientul de amortizare se reduce treptat, tinzând către o anumită valoare pentru întreaga grupă de materiale testate.

Se observă că efectul cel mai puternic îl are păsă sintetică împlegnată cu latex ” Neterom dublu super greu ”, iar tabla de 1 mm, fără material de adaos, are efect minim asupra transmiterii mișcării vibratorii.

În zona (100 — 500) Hz, curbele sunt puternic individualizate, la diferențe mari, funcție de materialul utilizat.

4.2.2. Materiale fonoabsorbante

Pentru a caracteriza proprietățile fonoabsorbante ale materialelor, este necesar a se preciza cantitativ, atât gradul de transmisie a undelor acustice la suprafața de separare a celor două medii, precum și gradul de absorbție acustică.

Coeficientul de reflexie acustică r este definit de raportul dintre fluxul de energie acustică a undelor reflectate și fluxul de energie acustică a undelor incidente pe suprafața de separare a celor două medii, astfel

$$r = \left(\frac{z - 1}{z + 1} \right)^2, \quad (4.20)$$

unde $z = \rho_2 c_2 / \rho_1 c_1$ este raportul impedanțelor celor două medii 1 și 2, iar $r = \bar{R}$, conform relației (1.172).

Coeficientul de transmisie acustică τ este definit de raportul dintre fluxul de energie acustică a undelor transmise și fluxul de energie acustică a undelor incidente pe suprafața de separare a celor două medii, astfel

$$\tau = \frac{2z}{z + 1}, \quad (4.21)$$

unde $\tau = \bar{T}$, conform relației (1.174).

Dacă la suprafața de separare a celor două medii are loc o disipare de energie acustică, atunci cantitatea de energie care nu este reflectată se consideră absorbită. Deci, un coeficient interesant practic îl constituie fenomenul de absorbție acustică la suprafața de separare a două medii, fenomen caracterizat prin coeficientul de absorbție acustică. În acest caz, coeficientul de absorbție acustică a

$$\alpha = 1 - \frac{\Phi_r}{\Phi_i}, \quad (4.22)$$

se definește astfel:

unde Φ_i este fluxul de energie acustică incidentă;

Φ_r - fluxul de energie acustică reflectată.

Coefficientul de absorbție acustică se mai poate scrie și sub forma:

$$\alpha = 1 - r \quad (4.23)$$

Capacitatea de absorbție crește pentru $r = 0$, adică atunci când fluxul de energie reflectată este nul sau când impedanța materialului $z = \rho c$ este cât mai apropiată de a aerului $z_o = \rho_o c_o$. Această proprietate este caracteristică în mod pregnant la materialele poroase. Acestea trebuie să aibă porii deschiși cu dimensiuni mici și să comunice între ei, astfel încât efectul de circulație forțată a aerului să conducă la o energie disipativă de natură vâscoasă și un regim adiabatic (cu indicele adiabatic X). Forța de frecare vâscoasă dintre aer și pereții canalelor, având ca origine porii din material, cu diametrul a , are expresia:

$$F_v = R_p v, \quad (4.24)$$

în care: R_p este coeficientul de frecare vâscoasă;

v - viteza de mișcare a aerului în material, egală cu cea dată de propagare a undei.

Expresia lui R_p este dată de relația lui Poiseuille, astfel:

$$R_p = 8 \rho v / a^2, \quad (4.25)$$

în care: v este coeficientul de vâscozitate (cinematică);

a - diametrul porilor.

În această ipoteză și pe baza ecuației de mișcare a masei de aer în interiorul materialului poros, se ajunge la relația:

$$\alpha = \frac{2}{ac} (\nu \chi \omega)^{1/2} \quad (4.26)$$

Rezultă că, pentru materialul cu anumite caracteristici geometrice și fizice date, coeficientul de absorbție acustică crește cu frecvența. Prin urmare, eficiența materialelor poroase este mare la absorbția zgomotului caracterizat printr-un spectru de frecvențe înalte.

O parte din materialele fonoabsorbante aplicate la insonorizarea cabinelor mașinilor de construcții sunt fabricate în țară (tabelul 4.2, unde sunt date valorile coeficientului de absorbție acustică în procente), iar caracteristicile fizico-mecanice au fost determinate experimental.

Determinări experimentale ale coeficientului de absorbție acustică se fac pe baza metodei undelor staționare și a folosirii tubului Kundt.

În figura 4.3 se prezintă schema bloc și sistemul experimental ce vizează principiul metodei. Pentru materialele prezentate în tabelul 4.1, au fost determinați coeficienții de absorbție acustică, în procente, în două variante:

- materiale simple;
- structuri compuse din materiale simple.

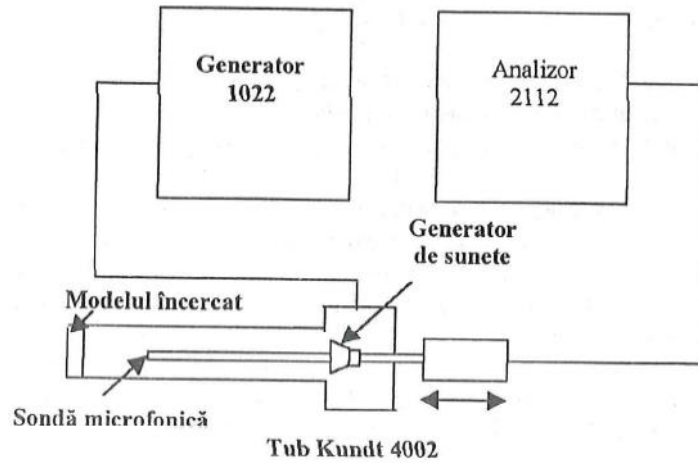


Fig. 4.3

Tabelul 4.2

Nr. crt.	Denumirea	Frecvența, Hz															
		100	125	160	200	250	315	400	500	630	800	1000	1250	1600	2000	2500	3150
1	Support textil neîmpregnat "Intersil" Grosimea, h = 6 mm	5	4	4	12	3	14	5	6	5	11	10	44	24	31	42	60
2	Placă din latex. Grosimea, h = 13 mm	4	4	4	8	8	17	14	20	16	25	44	80	82	46	70	85
3	Placă din deșeurii textile "TEFO". Grosimea, h = 6 mm	5	5	7	5	5	10	7	10	11	11	20	38	40	41	51	82
4	Structura compusă din piele sintetică "Sinapa" lipită pe suport textil împregnat "Netrom dublu supergreu"	4	8	15	17	18	15	13	11	16	21	19	21	30	55	91	89

Din analiza rezultatelor experimentale, se constată că, pentru materiale simple, coeficientul de absorbție acustică se menține la valori mici, sub 20%, în gama de frecvențe 0...500 Hz și atinge valori maxime în gama de frecvențe 1000...2000 Hz (fig. 4.4).

În cazul structurilor fonoabsorbante, s-au obținut combinații în care coeficientul de absorbție atinge valori de 50 chiar și în zona 0...500 Hz, iar la frecvențe mai ridicate, atinge valoarea de 97%.

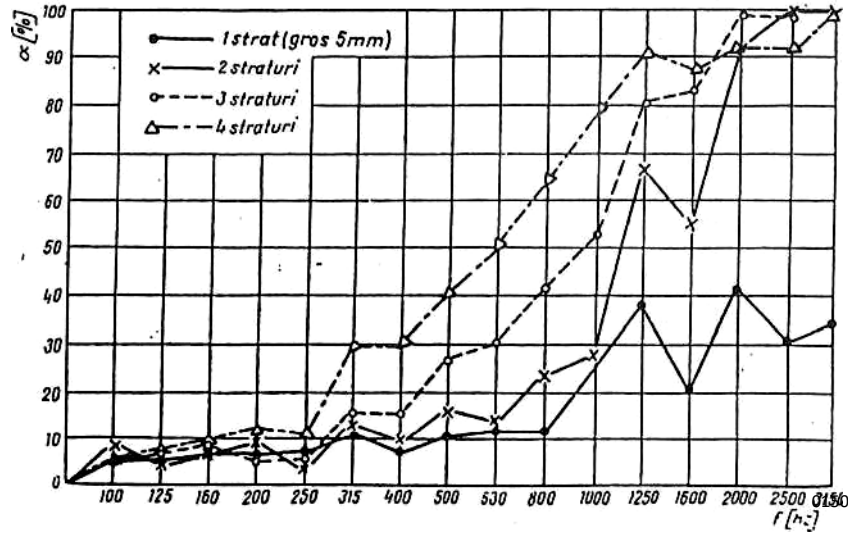


Fig. 4.4

4.3. Soluții de combatere a zgomotului la mașini de construcții

Pentru cazul mașinilor de construcții care lucrează în exteriorul clădirilor, în centre urbane și pe șantiere, apar două probleme importante și anume:

- combaterea zgomotului transmis mediului exterior;
- combaterea zgomotului transmis mecanicului operator anat în cabina mașinii.

Principalele surse de zgomot le constituie grupurile de acționare (motoare termice, motoare electrice, pompe hidraulice, motoare hidraulice etc.), din dotarea mașinilor de construcții, iar transmiterea zgomotului se realizează, atât prin aer, cât și prin structura mașinii.

La cabină, zgomotul se transmite, atât prin aer, cât și prin structura metalică a mașinii.

De aceea, se recurge la adoptarea a două tipuri de soluții tehnice de combatere a zgomotului și anume:

- carcasarea fonoizolantă a principalelor surse de zgomot;
- insonorizarea cabinei prin tratarea fonoabsorbantă și antivibratilă;

De asemenea, la mașinile de construcții care au în dotare motoare termice a căror sursă de zgomot este localizată la toba de eșapament, se utilizează atenatoare de tip reactiv pentru reducerea nivelului de zgomot.

4.3.10 Carcase fonoizolante

Cea mai mare categorie a utilajelor mobile au prevăzută închiderea completă a surselor de zgomot în carcase fonoabsorbante și fonoizolante. Astfel, se întâlnește foarte situația când grupul de acționare este carcasat fonoabsorbant și fonoizolant direct pe capotajul din tablă de oțel.

Propagarea zgomotului de la sursă în exterior are loc prin următoarele căi:

- pereții carcasei;
- neetanșeitățile, deschiderile tehnologice și funcționale ale carcasei;
- elementele de legătură dintre carcasă și structura mașinii;
- conducte, arbori și alte organe din structura utilajului care traversează pereții carcasei.

Diminuarea nivelului de zgomot realizată prin carcasarea unei surse, în ipoteza existenței unui câmp difuz în interiorul carcasei, se determină, în mod acoperitor, cu ajutorul relației:

$$\Delta L(f) = R(f) - 10 \lg \frac{S_c}{A_c(f)}, \quad (4.27)$$

în care: R este indicele de atenuare acustică corespunzător structurii fonoabsorbante aplicată la pereții carcasei, în dB;

S_c - suprafața interioară totală a carcasei, în m^2 ;

A_c - suprafața echivalentă de absorbție acustică interioară a carcasei, în $m^2 UA$.

Relația (4.27) se mai poate scrie:

$$\Delta L = R - 10 \lg \frac{S_c}{\sum \alpha_i S_i} \quad dB, \quad (4.28)$$

unde: S_i reprezintă suprafețele parțiale interioare;

α_i coeficientul de absorbție corespunzător elementului interior ”i” al carcasei.

Dacă suprafața interioară a carcasei este tratată în totalitate cu același material fonoabsorbant, atunci se obține:

$$\Delta L = R - 10 \lg \frac{1}{\alpha}, \quad dB. \quad (4.29)$$

Pe baza legii masei și a faptului că repartiția unghiurilor de incidență se realizează în mod statistic, indicele de reducere sonoră se poate scrie:

$$R_1 = 20 \lg fq - 47,5, \quad dB \quad (4.30)$$

în care: f este frecvența, în Hz.

q - masa superficială (masa unității de suprafață, în kg/m^2).

La proiectarea carcaselor, trebuie să se țină seama de următoarele recomandări:

- izolarea acustică crește cu creșterea masei pe unitatea de suprafață;
- eficiența izolației acustice (tratamentului fonoabsorbant) crește, în general, cu frecvența;
- mărirea gradului de etanșeitate a spațiului interior, care se obține prin tratarea fonoabsorbantă a orificiilor de trecere a conductelor și arborilor, a ușilor, capacelor de vizitare, cu respectarea cerințelor de acces, răcire, ventilare (fig. 4.5).

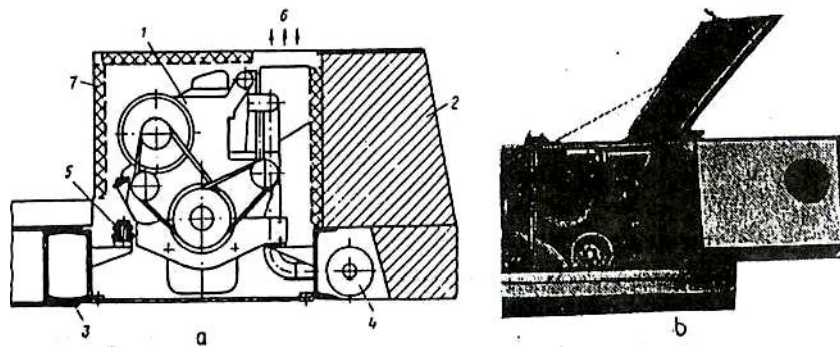


Fig. 4.5

a. **secțiune în plan vertical:** 1 — motor; 2— contragreutate; 3 - șasiu; 4 — atenuator de zgomot din dotarea țevii de eșapare; 5 — element antivibratil din cauciuc; 6 — orificii de evacuare a aerului; 7 — carcasă fonoizolantă.

b. **soluția tehnică de realizare insonorizantă a incintei care include grupul de acționare.**

Dacă din înțelegere se impune aerisirea în interiorul carcaselor, atunci se vor prevedea canale speciale de ventilare, cu pereții tratați cu structuri fonoabsorbante, astfel încât, la o secțiune de ventilare convenabilă, lungimea să fie cât mai mare (fig. 4.6). De asemenea, se va ține seama de următoarele:

- se va evita realizarea legăturilor rigide între sursa de zgomot în vibrație și carcasă;
- în cazul utilizării unor materiale fonoabsorbante pentru tratarea interioară a carcaselor ce adăpostesc motoare termice sau alte elemente de mașină ce dezvoltă temperaturi ridicate, atunci la proiectare se va ține seama de 'Normele

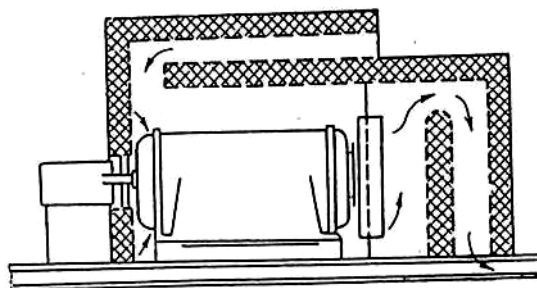


Fig. 4.6

În situația mașinilor de construcții cu acționare hidrostatică, carcasa ce adăpostesc grupul de acționare motor - pompă hidraulică vor fi traversate de conductele hidraulice ale circuitului de forță și de comandă, așa încât, în mod deosebit, se impune tratarea fonoabsorbantă a zonelor de trecere (fig. 4.7).



Fig. 4.7

Astfel, pentru calculul lungimii zonei mașonului fonoabsorbant de traversare a peretelui carcasei (fig. 4.7), se poate utiliza relația:

$$l = \Delta \frac{\Delta L_m h}{2.2\varphi}, \text{ cm} \quad (4.31)$$

unde: ΔL_m este atenuarea maximă pe care trebuie să o producă mașonul fonoabsorbant, în dB. Se menționează că valoarea lui ΔL_m trebuie să fie aproximativ egală cu valoarea atenuării acustice ΔL produsă de pereții carcasei, adică $\Delta L_m = \Delta L$;

h - grosimea stratului de aer, în cm;

φ - parametru ce depinde de coeficientul de absorbție acustică a materialului (structurii) fonoabsorbante din care este confecționat mașonul, așa cum se prezintă în tabelul de mai jos:

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
φ	0.10	0.20	0.35	0.5	0.65	0.90	1.20	1.60	2.00	4.00

În cazul în care continuitatea pereților carcasei este întreruptă de prezența ușilor, capacelor de vizitare, canalelor, atunci indicele de atenuare acustică (reducția sonoră) a carcasei se înrăutățește (se diminuează).

Indicele de atenuare sonoră (reducția sonoră) \bar{R} a peretelui carcasei cu discontinuități, de tipul celor arătate anterior, se calculează cu relația:

$$\bar{R} = R_0 - 10 \lg \left[1 + \frac{S_1}{S_0} \times (10^{0.1(R_0 - R_1)} - 1) \right] \quad [dB] \quad (4.32)$$

în care: R_0 este indicele de atenuare sonoră a peretelui carcasei fără deschideri:

R_i indicele de atenuare sonoră a deschiderii (ușă, capac, atenuator);

S_0 - aria totală (geometrică) a peretelui carcasei, inclusiv deschiderile;

S_i - aria totală (geometrică) a deschiderilor existente în peretele carcasei.

Pe baza relației de calcul (4.32), s-a construit nomograma din figura 4.8.

Când carcasa conține mai multe deschideri, atunci indicele de atenuare (reducția sonoră totală \bar{R}) poate fi calculată cu relația:

$$\bar{R} = R_0 - 10 \lg \left[\frac{S_A}{S_0} + \sum_{i=1}^n \frac{S_i}{S_0} 10^{0.1(R_0 - R_i)} \right] \quad [dB] \quad (4.33)$$

unde: S_A este numai aria peretelui carcanei;

S_i - aria deschiderii de ordinul "i", $i=1, \dots, n$;

R_i - indicele de atenuare (reducția) sonoră corespunzătoare deschiderii "i".

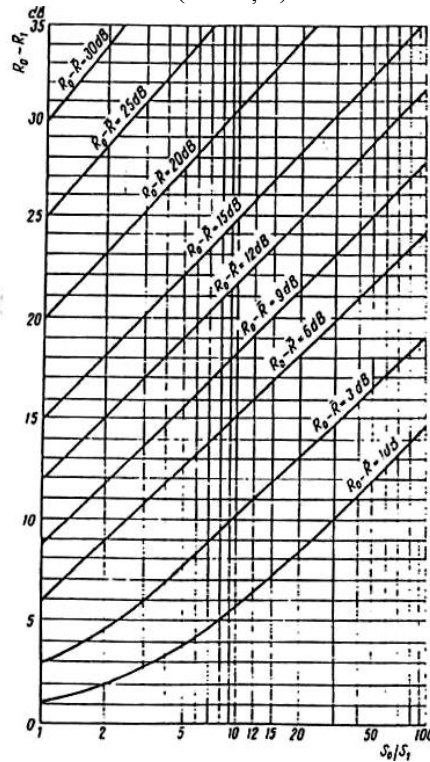


Fig. 4.8

4.3.4 Insonorizarea cabinelor mașinilor mobile

Depășirea nivelului de zgomot în cabină peste limitele admise implică măsuri speciale de reducere a zgomotului prin tratamente acustice. Într-o cabină cu o configurație geometrică oarecare pot fi tratate acustic toate suprafețele opace care au direcția orizontală, verticală sau oblică.

Se precizează că în cabină zgomotul provine de la surse exterioare acesteia, cum sunt: rupul de acționare, echipament, toba de eșapament a gazelor, ventilatoare etc.

Reducerea nivelului global de zgomot ce se poate obține prin tratarea fonoabsorbantă, în interior, a pereților cabinei, se poate calcula cu relația:

$$\Delta L = 10 \lg \frac{A}{A_0} \quad [dB], \tag{4.34}$$

în care: A_o este suprafața echivalentă de absorbție acustică a cabinei înainte de tratarea fonoabsorbantă, în m^2UA ;

A - suprafața echivalentă de absorbție acustică a cabinei după aplicarea tratamentului fonoabsorbant, în m^2UA .

Pentru suprafața echivalentă de absorbție se aplică relația :

$$A = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i, \quad (4.35)$$

în care: S_i este suprafața corespunzătoare porțiunii 'Si' din cabină, în m^2 ;
 α_i - coeficientul de absorbție fonică corespunzător suprafeței porțiunii 'i'

Coeficientul mediu de absorbție acustică a cabinei se poate calcula cu relația:

$$\alpha_m = \frac{\sum \alpha_i S_i}{S}, \quad (4.36)$$

unde S este suprafața totală a cabinei.

Pentru tablă din oțel, se recomandă $\alpha = 0,08$, iar pentru sticlă $\alpha = 0,03$.

Absorbția acustică din interiorul cabinei mai poate fi caracterizată și de constanta de absorbție R , dată de relația:

$$R = \frac{\alpha_m S}{1 - \alpha_m}. \quad (4.37)$$

Exemplu de calcul. I. Pentru utilajul multifuncțional 1WFT 45 (fig. 4.9), se cunosc următoarele valori ale suprafețelor:

$S_1 = 4.7m^2$ - suprafața geometrică tratată fonoabsorbant;

$S_2 = 1.7m^2$ - suprafața de metal ce va rămâne netratată fonoabsorbant;

$S_3 = 3.8m^2$ - suprafața vitrată.

Se aplică aplică structura fonoabsorbantă din tabelul 4. 10 poz. 7.

Relația de calcul a reducerii nivelului presiunii acustice este:

$$\Delta L = 10 \lg \frac{A}{A_0} \quad [dB].$$

Pentru aceasta se calculează:

$$A = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3$$

$$A = 0.97 \cdot 4.7 + 0.08 \cdot 1.7 + 0.03 \cdot 3.8 = 4.8 m^2 UA$$

$$A_0 = 0.08(4.7 + 1.7) + 0.03 \cdot 3.8 = 0.626 m^2 UA$$

$$\Delta L = 10 \lg \frac{4.8}{0.626} = 8.84 dB.$$

Reducerea nivelului de

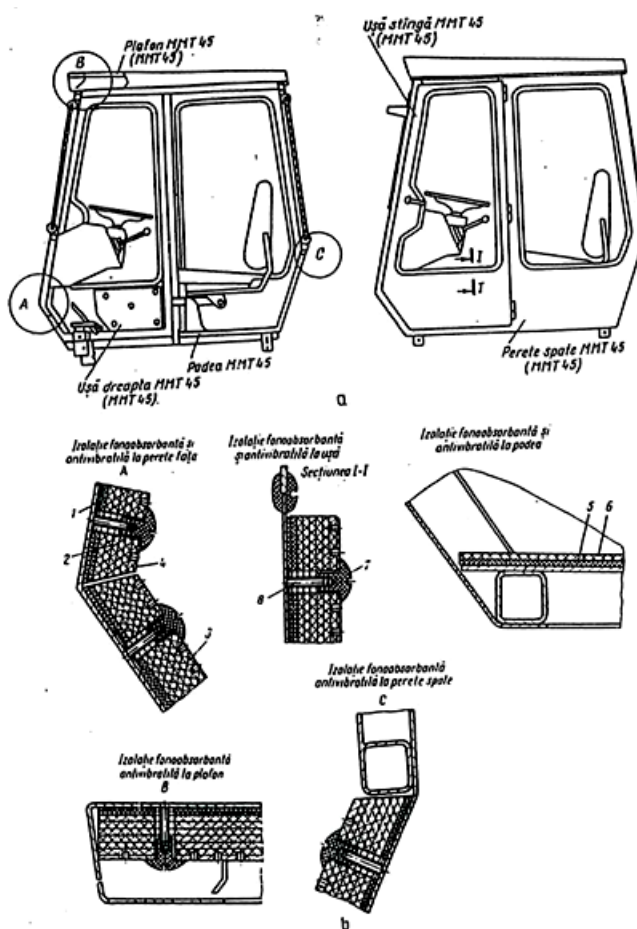
157

Coeficientul mediu de absorbție acustică este:

$$\alpha_m = \frac{\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3},$$

iar numeric rezultă:

$$\alpha_m = \frac{0.97 \cdot 4.7 + 0.08 \cdot 1.7 + 0.03 \cdot 3.8}{4.7 + 1.7 + 3.8} = 0.47.$$



a — secțiune și vedere; b — detalii: 1 — suport textil impregnat NETEROM dublu supergreu; 2 — suport textil neimpregnat INTERSIN F; 3 — suport textil impregnat NETEROM dublu supergreu perforat; 4 — piele sintetică tip greu perfoletată; 5 — cauciuc dur 65°Sh; 6 — cauciuc ripsat; 7 — rondea (poliamidă); 8 — tija de fixare (OB 37)

Fig. 4.9

Constanta de absorbție acustică este:

$$R_{\alpha} = \frac{\alpha_m}{1 - \alpha_m} S,$$

iar numeric rezultă:

$$R_{\alpha} = \frac{0.47}{1 - 0.47} \cdot 10.2 = 9.04.$$

2. Pentru *excavatorul S 1201*, se cunosc următoarele suprafețe, cu semnificația din exemplul precedent:

$$S_1 = 3.8 m^2;$$

$$S_2 = 1.2 m^2;$$

$$S_3 = 5.1 m^2.$$

Se calculează:

$$A = 0.97 \cdot 3.8 + 1.2 \cdot 0.08 + 5.1 \cdot 0.03 = 3.93 m^2 UA \cong 4 m^2 UA;$$

$$A_0 = (3.8 + 1.2) \cdot 0.08 + 5.1 \cdot 0.03 = 0.55 m^2 UA,$$

pe baza cărora rezultă:

$$\Delta L = 10 \lg \frac{A}{0.55} = 8.61 dB;$$

$$\alpha_m = \frac{\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \alpha_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3};$$

$$\alpha_m = \frac{0.97 \cdot 3.8 + 0.08 \cdot 1.2 + 0.03 \cdot 5.1}{3.8 + 1.2 + 5.1} = 0.39;$$

$$R_{\alpha} = \frac{0.39}{1 - 0.39} \cdot 10.1 = 6.45.$$

Se menționează că, pe baza determinărilor experimentale, s-a evidențiat o reducere cu 10 dB a nivelului de zgomot în cabina tratată fonoabsorbant față de situația inițială, când acestea nu i s-a aplicat tratamentul fonoabsorbant (fig. 4.10).

3. Pentru *compactatorul vibrator autopropulsat CVA 10*, se cunosc următoarele suprafețe (fig. 4.II a și b), cu semnificația notațiilor din exemplele precedente:

$$S_1 = 4.5 m^2;$$

$$S_2 = 2.1 m^2;$$

$$S_3 = 2.2 m^2.$$

Se calculează:

$$A = 4.5 \cdot 0.97 + 2.1 \cdot 0.08 + 2.2 \cdot 0.03 = 4.6 m^2 UA;$$

$$A_0 = (4.5 + 2.1)0.08 + 2.2 \cdot 0.03 = 0.59 m^2 UA \cong 0.6 m^2 UA,$$

pe baza cărora se obține:

$$\Delta L = 10 \lg \frac{4.6}{0.6} = 8.84 \text{ dB}$$

$$\alpha_m = \frac{4.6}{8.8} = 0.52$$

$$R_\alpha = \frac{0.52}{1 - 0.52} \cdot 8.8 = 9.53.$$

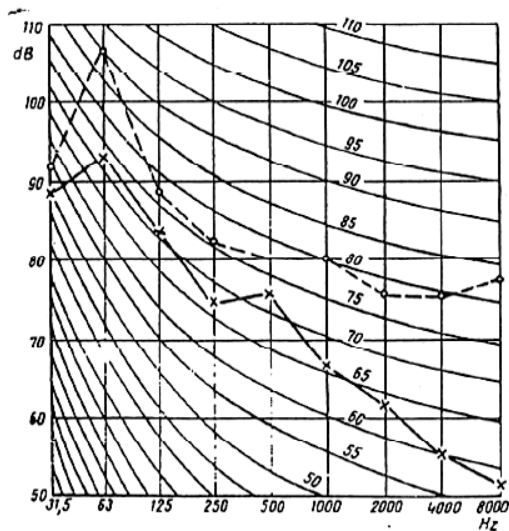
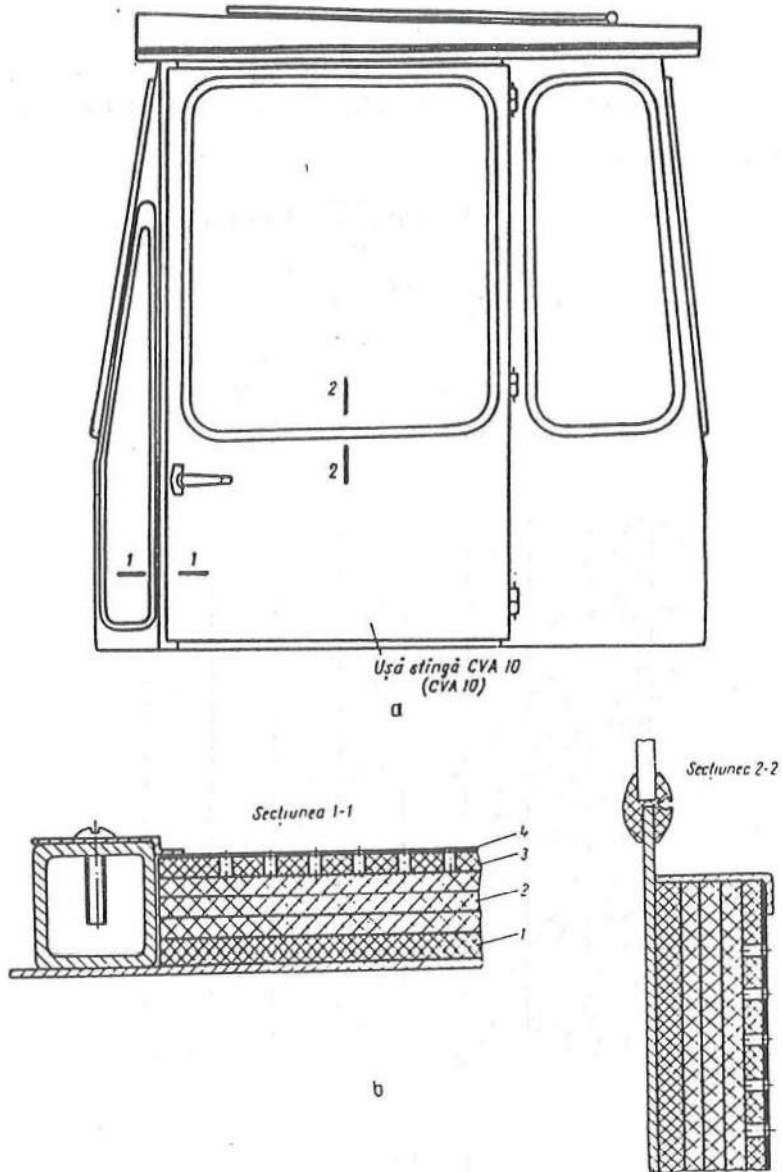


Fig. 4.10



a —secțiune și vedere; **b** — detalii: suport textil impregnat NETEROM dublu supergreu; 2 — suport textil neimpregnat INTERSIN F; 3 — suport textil impregnat NETEROM dublu supergreu perforat; 4 — piele sintetică SINAPA tip greu perforată.

Fig. 4.11

BIBLIOGRAFIE

1. Alexandrescu, L. Acustica Industrială, Editura INFOMARKET, Braşov, 2001.
2. Bratu,P. Vibratiile sistemelor elastice, Editura Tehnică, Bucureşti, 2000.
3. Bratu,P. Sisteme elastice de rezemare pentru maşini şi utilaje, Editura Tehnică, Bucureşti,1990.
4. Bratu, P. Mihalcea A. Analiza nivelului de zgomot şi vibram la maşinile portabile pentru construcţii, în vederea atestării tehnice. La sesiunea de comunicări ştiinţifice "Acustica şi mediul înconjurător", Academia Română, octombrie 1997.
5. Bratu, P., Mihalcea A. Evaluarea nivelului de zgomot şi vibraţii transmise sistemului mână-braţ, folosind acceleraţia echivalentă a semnalului în raport cu timpul de expunere. La sesiunea de comunicări ştiinţifice"Acustica şi mediul înconjurător", Academia Română, octombrie 1997.
6. Bratu,P., Mihalcea A. Damping coefficient calculus in case of antivibrating panels consisting of steel plates and rubber, Conferinţa de Acustică, Universitatea „Politehnica Bucureşti ", 15-17 octombrie 2001.
7. Bratu,P., Mihalcea A. Acoustic absorptivity characterization in case of romanian sound absorbing materials, Conferinţa de Acustică, Universitatea „Politehnica Bucureşti ' , 15-17 octombrie 2001. 8. Darabont,A. ş.a. Combaterea poluării sonore şi a vibraţiilor, Editura Tehnică Bucureşti, 1975.
9. Encscu,N., Magheţi,I.,Sârbu,M. Acustica tehnică, Universitatea „Politehnica" Bucureşti, 1997.
10. Gafiţanu,M., Merticaru,V., **Focşa,V.,Biborosch, L.** Vibraţii şi zgomote, Editura Junimea, Iaşi, 1980.
- 11.Grumăzescu, M., Stan,A. Combaterea zgomotului şi vibraţiilor, Editura Tehnică, Bucureşti,1964.
12. Hristov, A. Mecanica şi acustica, Editura APH, Bucureşti, 1999.
13. Iudin, Ia. Izolarea înţotriva zgomotelor, Editura Tehnică, Bucureşti, 1968.
14. Lopez, R.M. Ingineria acustica, Editura Paraninfo, Madrid, 1995.
15. Necşulea, A. Bazele acusticii clădirilor, Editura Academiei, Bucureşti, 1960.
16. Pupăzan, C. Acustica în construcţii, Editura Academiei, Bucureşti, 1970.
17. Rossi, M. Acoustique, EPFL, LEMA, voi IX, Lousanne, 1994.
18. Stan,A., Negrea,A. Acustica mediului înconjurător, Bucureşti, 2002.
19. Stanciu,C ş.a. Cercetări privind reducerea nivelului de zgomot la maşinile de construcţii. La simpozionul "Probleme actuale de acustică aplicată", Academia Română, Bucureşti, 1978.
20. Vereş, Al.,Vasilache, M. Elemente de acustica clădirilor, Editura CERMI, Iaşi, 2002.
21. Voinea,R.,Voiculescu, D. Vibraţii mecanice, IPB, Bucureşti, 1979.